Министерство сельского хозяйства РФ

ФГОУ ВПО «Брянская государственная
сельскохозяйственная академия»

Петракова Н.В.

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
МОДЕЛИ. МЕТОДЫ. ПРИМЕРЫ

Брянск 2011

УДК 51:681.3(035.3)
ББК 22.1:32.973
П 30

Петракова Н.В. **Основы математического моделирования. Модели. Методы. Примеры** / Н.В. Петракова. Брянск: Издательство Брянская ГСХА. 2011. – 162 с.

ISBN 978-5-88517-199-1

В монографии изложены универсальные методологические подходы, позволяющие строить адекватные математические модели изучаемых объектов. Представлены методы, примеры построения и анализа математических моделей для решения различных задач.

Для специалистов по математическому моделированию, аспирантов, студентов, изучающих и использующих методы математического моделирования, вычислительного эксперимента.

Рецензенты: доцент кафедры информатики Голубева И.Е.
к.э.н., доцент кафедры «Вычислительная техника и информационное обеспечение АПК» ФГОУ ВПО С.-Петербургский государственный аграрный университет Галанина О.В.

Рекомендовано к изданию учебно-методической комиссией факультета энергетики и природопользования от 12.04.2011 г. протокол № 4.

ISBN 978-5-88517-199-1

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.. 6

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМЫ И ПРИНЦИПЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ 8
§ 1. Основные понятия моделирования............. 8
§ 2. Классификация математических моделей.. 11
§ 3. Этапы моделирования.......................... 18
§ 4. Адекватность модели............................ 21
§ 5. Требования, предъявляемые к моделям........

2. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ.................................. 27
§ 1. Понятие системы..................................... 27
§ 2. Состав и структура системы.................... 28
§ 3. Модели систем.. 31

3. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ............ 36
§ 1. Общая задача линейного программирования.. 36
§ 2. Построение экономико-математических моделей задач линейного программирования. 38
§ 3. Решение задач линейного программирования с помощью Поиска решения в MS Excel… 40
§ 4. Двойственные задачи линейного программирования.. 48

4. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.................................. 54
§ 1. Закрытая модель транспортной задачи..... 54
§ 2. Решение транспортной задачи с помощью Поиска решения в MS Excel........................ 57
§ 3. Открытая модель транспортной задачи… 60

5. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ... 63
§ 1. Постановка задачи…………………………..…. 63
§ 2. Обобщенная целевая функция……………...…. 66

6. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ……... 70
§ 1. Основные понятия нелинейного программирования………………………………………. 70
§ 2. Решение задач нелинейного программирования…………………………………………. 71

7. ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ.. 73
§ 1. Основные понятия теории вероятностей… 73
§ 2. Числовые характеристики случайных величин…………………………………………….. 75
§ 3. Методы и модели корреляционно-регрессионного анализа……………………….. 83
§ 4. Многомерный анализ………………………… 89

8. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ………… 94
§ 1. Понятие производственных функций……… 94
§ 2. Виды производственных функций………….. 96
§ 3. Расчет параметров производственных функций…………………………….………… 98

9. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРОГНОЗИРОВАНИИ……………………………………….. 102
§ 1. Цель, типы и способы прогнозирования……. 102
§ 2. Прогнозирование методом статистического анализа…………………………….………….. 106

10. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ…………………………………… 11
3

§ 1. Виды и цели планирования…………………….. 11
3

§ 2. Календарное планирование…………………… 11
9

§ 3. Балансовый метод планирования…………… 12
1

§ 4. Сетевое планирование…………………………. 12
6

11. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ ХОЗЯЙСТВЕННЫХ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ………………………… 13
6

§ 1. Виды неопределенности……………………….. 13
6

§ 2. Модели систем массового обслуживания….. 14
2

§ 3. Методы теории игр…………………………….. 14
7

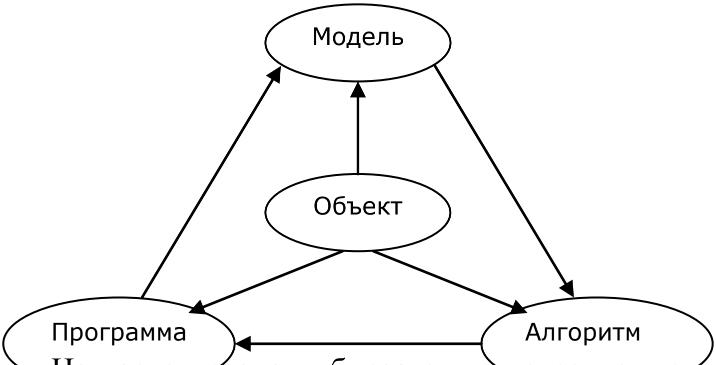
ГЛОССАРИЙ 15
3

ЛИТЕРАТУРА 15
9

ВВЕДЕНИЕ

Невозможно представить себе современную науку без широкого применения математического моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его «образом» – математической моделью – и дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютере вычислительно-логических алгоритмов. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых ситуациях. В то же время вычислительные (компьютерные, имитационные) эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на современные вычислительные методы и технические инструменты информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам. Методология математического моделирования бурно развивается, охватывая все новые сферы – от разработки технических систем и управления ими до анализа сложнейших экономических и социальных процессов.

Математическое моделирование условно можно разбить на три этапа: *модель – алгоритм – программа*.



На первом этапе выбирается или строится «эквивалент» объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства – законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям и т.д. Математическая модель исследуется теоретическими методами, что позволяет получить важные предварительные знания об объекте.

Второй этап – выбор или разработка алгоритма для реализации модели на компьютере. Модель представляется в форме, удобной для применения численных методов, определяется последовательность вычислительных и логических операций, которые нужно произвести, чтобы найти искомые величины с заданной точностью.

На третьем этапе создаются или используются программы для реализации модели на компьютере.

После определения адекватности (достаточное соответствие) модели, с ней проводятся разнообразные и подробные «опыты», дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта. Процесс моделирования сопровождается улучшением и уточнением, по мере необходимости.

Изложенный материал в монографии содержит большое количество иллюстраций и задач, который может быть использован для формирования учебных курсов по различным конкретным направлениям математического моделирования.

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОРМЫ И ПРИНЦИПЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

§ 1. *Основные понятия моделирования*

МОДЕЛЬ [model] – логическое или математическое описание компонентов и функций, отображающих существенные свойства моделируемого объекта или процесса (обычно рассматриваемых как системы или элементы системы). Модель используется как условный образ, сконструированный для упрощения их исследования. Природа моделей может быть различной.

МОДЕЛИРОВАНИЕ [modelling, model-building] – 1. Исследование объектов познания на моделях. 2. Построение и изучение моделей реально существующих предметов и явлений, а также предполагаемых (конструируемых или проектируемых) объектов.

Моделирование в обоих указанных смыслах является мощным орудием научного познания и решения практических задач и широко используется как в науке, так и во многих областях производственной деятельности человека.

С теоретической точки зрения, модель – гомоморфное[1] отображение моделируемого объекта действительности. Ряд авторов, стремясь глубже проникнуть в процесс образования модели, утверждают, что она изоморфна[2] по отношению к некоторому абстрактному образу, представлению об объекте, которое в свою очередь является его гомоморфным отображением.

Моделирование основывается на принципе аналогии и позволяет (при определенных условиях и с учетом неизбежной относительности аналогии) изучать объект, почему-либо трудно доступный для изучения, не непосредственно, а через рассмотрение другого, подобного ему и более доступного объекта – модели. По свойствам модели оказывается возможным судить о свойствах изучаемого объекта: не обо всех, а лишь о тех, которые аналогичны и в модели, и в объекте и при этом важны для исследования (такие свойства называются *существенными*).

Различается подобие между моделируемым объектом и моделью: *физическое* – когда объект и модель имеют одинаковую или сходную физическую природу; *структурное* – при сходстве между структурой объекта и структурой модели; *функциональное* – с точки зрения выполнения объектом и моделью сходных функций при соответствующих воздействиях; *динамическое* – между последовательно изменяющимися состояниями объекта и модели; *вероятностное* – между процессами вероят-

---

[1] **Гомоморфная модель** - если существует соответствие, лишь между наиболее значительными составными частями объекта и модели.

[2] **Изоморфная модель** - если между нею и реальным объектом, процессом или системой существует полное поэлементное соответствие.

ностного характера в объекте и модели; *геометрическое* – между пространственными характеристиками объекта и модели. Соответственно различаются типы моделей.

В зависимости от логических свойств и связей моделей с отображаемыми явлениями можно все модели разделить на три типа: ***изобразительные***, ***аналоговые*** и ***математические***.

Изобразительная модель отражает внешние характеристики явления и подобна оригиналу. Это наиболее простая и конкретная модель. Являясь в общем описательной моделью, она, как правило, не дает возможности установить причинные связи явления и соответственно определить или предсказать последствия изменений различных параметров явления. Характерная особенность такой модели – близкое совпадение ее свойств со свойствами отображаемого объекта. Эти свойства обычно подвергаются метрическому преобразованию, т.е. берется определенный масштаб.

В ***аналоговых моделях*** свойство данного явления отображается посредством свойств другого явления. Так, например, любая диаграмма представляет аналоговую модель некоторого явления. К аналоговым моделям относятся также морские карты, на которых совокупностью условных обозначений отображается совокупность свойств той или иной акватории. Преимущество аналоговой модели перед изобразительной состоит в том, что она позволяет отображать динамику явления. Другим преимуществом является большая универсальность этой модели: путем ее изменения можно отобразить различные процессы данного явления.

Математическая модель является самой сложной и наиболее общей и абстрактной по сравнению с изобразительной и аналоговой. В ней для отображения свойств изучаемого явления используются символы математического или логического характера. Особые трудности возникают при решении задач с большой размерностью, расплывчатой постановкой, неопределенностью информации и т.д. В постановке таких задач появляются неклассические моменты, такие, как плохая формализуемость[3], нестандартность, противоречивость. Математические модели служат отражению и анализу некоторых свойств действительных объектов. Рассмотрим один из видов математических моделей, характеризующихся простой структурой и широко применяющихся в приложениях. Модели такого вида содержат следующие элементы:

1. вектор $\boldsymbol{x}$ параметров, измеряемых на объекте: $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]$ где x_i – значение i-го параметра, которое является чаще всего вещественным числом. Можно назвать $\boldsymbol{x}$ вектором состояния объекта. Если изучается динамика моделируемого объекта во времени $\boldsymbol{t}$, то считается, что состояние в каждой момент $\boldsymbol{t}$ описывается вектором $\boldsymbol{x(t)} = [x_1(\mathrm{t}), \dots, x_n(t)]$;
2. вектор $\boldsymbol{y(t)}$ параметров, которые не могут быть непосредственно измеренными;
3. неизвестные связи между переменными координатами векторов $\boldsymbol{x(t)}$ и $\boldsymbol{y(t)}$;
4. связи между переменными, являющиеся неизвестными;
5. математический аппарат исследования соотношений (связей).

§ 2. *Классификация математических моделей*

[3] **Формализация** – это замена реального объекта или процесса его формальным описанием, т. е. его информационной моделью.

Каждая модель создается для конкретной цели и, следовательно, уникальна. Однако наличие общих черт позволяет сгруппировать все их многообразие в отдельные классы, что облегчает их разработку и изучение. В теории рассматривается много признаков классификации, но общепризнанной единой классификации моделей в настоящее время не существует. Тем не менее, наиболее актуальны следующие *признаки классификации*:

- характер моделируемой стороны объекта;
- характер процессов, протекающих в объекте;
- способ реализации модели.

Классификация моделей по признаку «характер моделируемой стороны объекта»

В соответствии с этим признаком модели могут быть:

- *функциональными (кибернетическими)*;
- *структурными*;
- *информационными*.

Функциональные модели отображают только поведение, функцию моделируемого объекта. В этом случае моделируемый объект рассматривается как "черный ящик", имеющий входы и выходы. Физическая сущность объекта, природа протекающих в нем процессов, структура объекта остаются вне внимания исследователя, хотя бы потому, что неизвестны. При функциональном моделировании эксперимент состоит в наблюдении за выходом моделируемого объекта при искусственном или естественном изменении входных воздействий. По этим данным и строится модель поведения в виде некоторой математической функции.

Компьютерная шахматная программа – функциональная модель работы человеческого мозга при игре в шахматы.

Структурное моделирование это создание и исследование модели, структура которой (элементы и связи) подобна структуре моделируемого объекта. Как мы выяснили ранее, подобие устанавливается не вообще, а относительно цели исследования. Поэтому она может быть описана на разных уровнях рассмотрения. Наиболее общее описание структуры – это топологическое описание с помощью теории графов.

Учение войск – структурная модель вида боевых действий.

Информационная модель – модель объекта, представленная в виде информации, описывающей существенные для данного рассмотрения параметры и переменные величины объекта, связи между ними, входы и выходы объекта.

Информационные модели представляют объекты и процессы в *образной* (например, рисунки, фотографии) или *знаковой* (например, периодической таблицы элементов Д.И. Менделеева) *форме*.

Классификация моделей по признаку «характер процессов, протекающих в объекте»

По этому признаку модели могут быть *детерминированными* или *стохастическими, статическими* или *динамическими, дискретными* или *непрерывными* или *дискретно-непрерывными*.

Детерминированные модели отображают процессы, в которых отсутствуют случайные воздействия. **Стохастические модели** отображают вероятностные процессы и события.

Статические модели служат для описания состояния объекта в какой-либо момент времени. **Динамические модели** отображают поведение объекта во времени.

Дискретные модели отображают поведение систем с дискретными состояниями. **Непрерывные модели** представляют системы с непрерывными процессами. **Дискретно-непрерывные** модели строятся тогда, когда исследователя интересуют оба эти типа процессов.

Очевидно, конкретная модель может быть стохастической, статической, дискретной или какой-либо другой, в соответствии со связями, показанными на рис. 1.1.

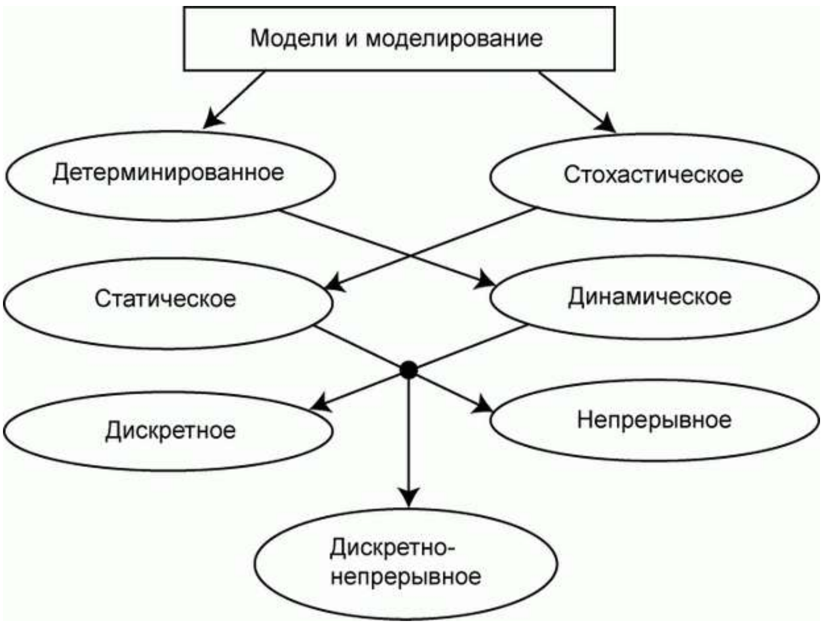


Рис. 1.1. *Классификация моделей и моделирования*

Классификация моделей по признаку «способ реализации модели»

Согласно этому признаку модели делятся на два обширных класса:

- *абстрактные (мысленные) модели*;
- *материальные модели*.

Нередко в практике моделирования присутствуют смешанные, абстрактно-материальные модели.

Абстрактные модели представляют собой определенные конструкции из общепринятых знаков на бумаге или другом материальном носителе или в виде компьютерной программы.

Абстрактные модели, не вдаваясь в излишнюю детализацию, можно разделить на:

- *символические*;
- *математические*.

Символическая модель – это логический объект, замещающий реальный процесс и выражающий основные свойства его отношений с помощью определенной системы знаков или символов. Это либо слова естественного языка, либо слова соответствующего тезауруса, графики, диаграммы и т. п.

Символическая модель может иметь самостоятельное значение, но, как правило, ее построение является начальным этапом любого другого моделирования.

Математическое моделирование – это процесс установления соответствия моделируемому объекту некоторой математической конструкции, называемой математической моделью, и исследование этой модели, позволяющее получить характеристики моделируемого объекта.

Математическое моделирование – главная цель и основное содержание изучаемой дисциплины.

Математические модели могут быть:

- *аналитическими*;
- *имитационными*;
- *смешанными* (аналитико-имитационными).

Аналитические модели – это функциональные соотношения: системы алгебраических, дифференциальных, логических условий. Уравнения Максвелла – аналитическая модель электромагнитного поля. Закон Ома – модель электрической цепи.

Преобразование математических моделей по известным законам и правилам можно рассматривать как эксперименты. Решение на основе аналитических моделей может быть получено в результате однократного просчета безотносительно к конкретным значениям характеристик («в общем виде»). Это наглядно и удобно для выявления закономерностей. Однако для сложных систем построить аналитическую модель, достаточно полно отражающую реальный процесс, удается не всегда. Тем не менее, есть процессы, например, марковские, актуальность моделирования которых аналитическими моделями доказана практикой.

Имитационное моделирование. Создание вычислительных машин обусловило развитие нового подкласса математических моделей – имитационных. Имитационное моделирование предполагает представление модели в виде некоторого алгоритма – компьютерной программы, – выполнение которого имитирует последовательность смены состояний в системе и таким образом представляет собой поведение моделируемой системы.

Процесс создания и испытания таких моделей называется имитационным моделированием, а сам алгоритм – имитационной моделью.

В чем заключается отличие имитационных и аналитических моделей?

В случае аналитического моделирования ЭВМ является мощным калькулятором. Аналитическая модель решается на ЭВМ.

В случае же имитационного моделирования имитационная модель – программа – реализуется на ЭВМ.

Имитационные модели достаточно просто учитывают влияние случайных факторов. Для аналитических моделей это серьезная проблема. При наличии случайных факторов необходимые характеристики моделируемых процессов получаются многократными прогонами (реализациями) имитационной модели и дальнейшей статистической обработкой накопленной информации. Поэтому часто имитационное моделирование процессов со случайными факторами называют **статистическим моделированием**.

Если исследование объекта затруднено использованием только аналитического или имитационного моделирования, то применяют *смешанное* (комбинированное), *аналитико-имитационное* моделирование. При построении таких моделей процессы функционирования объекта декомпозируются на составляющие подпроцессы и для которых возможно используют аналитические модели, а для остальных подпроцессов строят имитационные модели.

Материальное моделирование основано на применении моделей, представляющих собой реальные технические конструкции. Это может быть сам объект или его элементы (**натурное моделирование**). Это может быть специальное устройство – модель, имеющая либо физическое, либо геометрическое подобие оригиналу. Это может быть устройство иной физической природы, чем оригинал, но процессы, в котором описываются аналогичными математическими соотношениями. Это так называемое аналоговое моделирование. Такая аналогия наблюдается, например, между колебаниями антенны спутниковой связи под ветровой нагрузкой и колебанием электрического тока в специально подобранной электрической цепи.

Нередко создаются **материально-абстрактные модели**. Та часть операции, которая не поддается математическому описанию, моделируется материально, остальная – абстрактно.

Классификация по рассмотренному признаку – способу реализации модели – показана на рис. 1.2.

Рис. 1.2. *Классификация по способу реализации модели*

§ 3. *Этапы моделирования*

Первый этап: уяснение целей моделирования. Вообще-то это главный этап любой деятельности. Цель существенным образом определяет содержание остальных этапов моделирования. Заметим, что различие между простой системой и сложной порождается не столько их сущностью, но и целями, которые ставит исследователь.

Обычно целями моделирования являются:

- прогноз поведения объекта при новых режимах, сочетаниях факторов и т. п.;
- подбор сочетания и значений факторов, обеспечивающих оптимальное значение показателей эффективности процесса;
- анализ чувствительности системы на изменение тех или иных факторов;
- проверка различного рода гипотез о характеристиках случайных параметров исследуемого процесса;
- определение функциональных связей между поведением («реакцией») системы и влияющими факторами, что может способствовать прогнозу поведения или анализу чувствительности;
- уяснение сущности, лучшее понимание объекта исследования, а также формирование первых навыков для эксплуатации моделируемой или действующей системы.

Второй этап: построение концептуальной модели. Концептуальная модель (от лат. conception) – модель на уровне определяющего замысла, который формируется при изучении моделируемого объекта. На этом этапе исследуется объект, устанавливаются необходимые упрощения и аппроксимации. Выявляются существенные аспекты, исключаются второстепенные. Устанавливаются единицы измерения и диапазоны изменения переменных модели. Если возможно, то концептуальная модель представляется в виде известных и хорошо разработанных систем: массового обслуживания, управления, авторегулирования, разного рода автоматов и т. д. Концептуальная модель полностью подводит итог изучению проектной документации или экспериментальному обследованию моделируемого объекта.

Результатом второго этапа является обобщенная схема модели, полностью подготовленная для математического описания – построения математической модели.

Третий этап: выбор языка программирования или моделирования, разработка алгоритма и программы модели. Модель может быть аналитической или имитационной, или их сочетанием. В случае аналитической модели исследователь должен владеть методами решения.

Результатом третьего этапа моделирования является программа, составленная на наиболее удобном для моделирования и исследования языке – универсальном или специальном.

Четвертый этап: планирование эксперимента. Математическая модель является объектом эксперимента. Эксперимент должен быть в максимально возможной степени информативным, удовлетворять ограничениям, обеспечивать получение данных с необходимой точностью и достоверностью.

Результат четвертого этапа – план эксперимента.

Пятый этап: выполнение эксперимента с моделью. Если модель аналитическая, то эксперимент сводится к выполнению расчетов при варьируемых исходных данных. При имитационном моделировании модель реализуется на ЭВМ с фиксацией и последующей обработкой получаемых данных. Эксперименты проводятся в соответствии с планом, который может быть включен в алгоритм модели. В современных системах моделирования такая возможность есть.

Шестой этап: обработка, анализ и интерпретация данных эксперимента. В соответствии с целью моделирования применяются разнообразные методы обработки: определение разного рода характеристик случайных величин и процессов, выполнение анализов – дисперсионного, регрессионного, факторного и др. Многие из этих методов входят в системы моделирования и могут применяться автоматически. Не исключено, что в ходе анализа полученных результатов модель может быть уточнена, дополнена или даже полностью пересмотрена.

После анализа результатов моделирования осуществляется их интерпретация, то есть перевод результатов в термины предметной области. Это необходимо, так как обычно специалист предметной области (тот, кому нужны результаты исследований) не обладает терминологией математики и моделирования и может выполнять свои задачи, оперируя лишь хорошо знакомыми ему понятиями.

В заключении отметим, что, во-первых, моделирование процесс итеративный, то есть с каждого этапа может осуществляться возврат на любой из предыдущих этапов для уточнения информации, необходимой на этом этапе, а документация может сохранить результаты, полученные на предыдущей итерации.

Во-вторых, в случае исследования сложной системы в нем участвуют большие коллективы разработчиков, причем различные этапы выполняются различными коллективами. Поэтому результаты, полученные на каждом этапе, должны быть переносимы на последующие этапы, то есть иметь унифицированную форму представления и понятное другим заинтересованным специалистам содержание.

В-третьих, результат каждого из этапов должен являться самоценным продуктом. Например, концептуальная модель может и не использоваться для дальнейшего преобразования в математическую модель, а являться описанием, хранящим информацию о системе, которое может использоваться как архив, в качестве средства обучения и т. д.

§ 4. *Адекватность модели*

Итак, модель предназначена для замены оригинала при исследованиях, которым подвергать оригинал нельзя или нецелесообразно. Но замена оригинала моделью возможна, если они в достаточной степени похожи или адекватны.

Адекватность [лат. adaequatus – приравненный] означает, достаточно ли хорошо с точки зрения целей исследования результаты, полученные в ходе моделирования, отражают истинное положение дел. Говорят, что модель адекватна оригиналу, если при ее интерпретации возникает новый объект, в высокой степени сходный с оригиналом.

До тех пор, пока не решен вопрос, правильно ли отображает модель исследуемую систему (то есть адекватна ли она), ценность модели нулевая!

Термин «адекватность» как видно носит весьма расплывчатый смысл. Понятно, что результативность моделирования значительно возрастет, если при построении модели и переносе результатов с модели на систему – оригинал может воспользоваться некоторой теорией, уточняющей идею подобия, связанную с используемой процедурой моделирования.

К сожалению теории, позволяющей оценить, адекватность математической модели и моделируемой системы нет, в отличие от хорошо разработанной теории подобия явлений одной и той же физической природы.

Проверку адекватности проводят на всех этапах построения модели, начиная с самого первого этапа – концептуального анализа. Если описание системы будет составлено не адекватно реальной системе, то и модель, как бы точно она не отображала описание системы, не будет адекватной оригиналу. Здесь сказано «как бы точно», так как имеется в виду, что вообще не существуют математические модели, абсолютно точно отображающие процессы, существующие в реальности.

Если изучение системы проведено качественно и концептуальная модель достаточно точно отражает реальное положение дел, то далее перед разработчиками стоит лишь проблема эквивалентного преобразования одного описания в другое.

Итак, можно говорить об адекватности модели в любой ее форме и оригинала, если:

- описание поведения, созданное на каком-либо этапе, достаточно точно совпадает с поведением моделируемой системы в одинаковых ситуациях;
- описание убедительно представительно относительно свойств системы, которые должны прогнозироваться с помощью модели.

Предварительно исходный вариант математической модели подвергается следующим проверкам:

- все ли существенные параметры включены в модель;
- нет ли в модели несущественных параметров;
- правильно ли отражены функциональные связи между параметрами;
- правильно ли определены ограничения на значения параметров;

- не дает ли модель абсурдные ответы, если ее параметры принимают предельные значения;

Такая предварительная оценка адекватности модели позволяет выявить в ней наиболее грубые ошибки.

Окончательное суждение об адекватности модели может дать лишь практика, то есть сравнение модели с оригиналом на основе экспериментов с объектом и моделью. Модель и объект подвергаются одинаковым воздействиям и сравниваются их реакции. Если реакции одинаковы (в пределах допустимой точности), то делается вывод, что модель адекватна оригиналу. Однако надо иметь в виду следующее:

- воздействия на объект носят ограниченный характер из-за возможного разрушения объекта, недоступности к элементам системы и т. д.;
- воздействия на объект имеют физическую природу (изменение питающих токов и напряжений, температуры, скорости вращения валов и т. д.), а на математическую модель – это числовые аналоги физических воздействий.

Для оценки степени подобия структур объектов (физических или математических) существует понятие изоморфизма (изо – одинаковый, равный, морфе – форма, греч.).

Две системы изоморфны, если существует взаимно однозначное соответствие между элементами и отношениями (связями) этих систем.

При моделировании сложных систем достигнуть такое полное соответствие трудно, да и нецелесообразно. При моделировании абсолютное подобие не имеет места. Стремятся лишь к тому, чтобы модель достаточно хорошо отражала исследуемую сторону функционирования объекта. Модель по сложности может стать аналогичной исследуемой системе и никакого упрощения исследования не будет.

Для оценки подобия в поведении (функционировании) систем существует понятие изофункционализма.

Две системы произвольной, а подчас неизвестной структуры изофункциональны, если при одинаковых воздействиях они проявляют одинаковые реакции. Такое моделирование называется функциональным или кибернетическим и в последние годы получает все большее распространение, например, при моделировании человеческого интеллекта (игра в шахматы, доказательство теорем, распознавание образов и т. д.). Функциональные модели не копируют структуры. Но копируя поведение, исследователи последовательно «подбираются» к познанию структур объектов (человеческого мозга, Солнца, и др.).

§ 5. *Требования, предъявляемые к моделям*

Общие требования к моделям:

1. Модель должна быть *актуальной*. Это значит, что модель должна быть нацелена на важные для лиц, принимающих решения, проблемы.
2. Модель должна быть *результативной*. Это значит, что полученные результаты моделирования могут найти успешное применение. Данное требование может быть реализовано только в случае правильной формулировки требуемого результата.
3. Модель должна быть *достоверной*. Это значит, что результаты моделирования не вызовут сомнения. Данное требование тесно связано с

понятием адекватности, то есть, если модель неадекватна, то она не может давать достоверных результатов.

4. Модель должна быть *экономичной*. Это значит, что эффект от использования результатов моделирования превышает расходы ресурсов на ее создание и исследование.

Эти требования (обычно их называют внешними) выполнимы при условии обладания моделью внутренними свойствами.

Модель должна быть:

1. *Существенной,* т.е. позволяющей вскрыть сущность поведения системы, вскрыть неочевидные, нетривиальные детали.
2. *Мощной*, т.е. позволяющей получить широкий набор существенных сведений.
3. *Простой* в изучении и использовании, легко просчитываемой на компьютере.
4. *Открытой*, т.е. позволяющей ее модификацию.

Трудно ограничить область применения математического моделирования. При изучении и создании различных систем практически всегда можно определить цели, ограничения и предусмотреть, чтобы конструкция или процесс подчинялись естественным, техническим и (или) экономическим законам.

В последние десятилетия появились проблемы с неясными и противоречивыми целями, диктуемыми политическими и социальными факторами. Математическое моделирование в этой области пока еще проблематично. Что это за проблемы? Защита от загрязнения окружающей среды; предсказаний извержений вулканов, землетрясений, цунами; рост городов; руководство боевыми действиями и ряд других. Но, тем не менее, проблемы моделирования таких сверхсложных систем постоянно находят свое раз-решение. Здесь следует отметить лидирующую роль отечественных ученых и, в первую очередь, академика Н.Н. Моисеева, его учеников и последователей.

2. СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ

Для того чтобы получить информационную модель любого реального объекта или процесса, необходимо рассмотреть его с системной точки зрения – выполнить **системный анализ объекта**. Задача системного анализа, который проводит исследователь, – упорядочить свои представления об изучаемом объекте для того, чтобы отразить их в информационной модели. Таким образом, просматривается следующий порядок этапов перехода от реального объекта к информационной модели:

РЕАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ ⇒ СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ⇒ СИСТЕМА ДАННЫХ, СУЩЕСТВЕН-

НЫХ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ⇒ ИНФОРМАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ

§ 1. *Понятие системы*

Под **системой** понимается любой объект, состоящий из множества взаимосвязанных частей и существующий как единое целое.

Любой реальный объект – это сложная система, которая обладает бесконечным множеством различных свойств и характеристик. Важнейшим этапом моделирования является разделение параметров, характеризующих моделируемый объект или процесс, по степени важности влияния их изменений на поведение объекта или процесса, – то поведение, которое представляется важным с точки зрения достижения целей моделирования. Такой процесс называется **ранжированием**. Чаще всего невозможно (да и не нужно) учитывать все факторы, которые могут повлиять на поведение объекта или процесса, – нужно выделить важнейшие из них. От того, насколько удачно на этапе системного анализа будут выделены важнейшие факторы, зависит успех моделирования, быстрота и эффективность достижения цели.

Наука о системах называется **системологией**. Системы бывают *материальные*, *нематериальные* и *смешанные*. Примеры материальных систем: дерево, здание, человек, планета Земля, Солнечная система. Примеры нематериальных систем: человеческий язык, математика. Пример смешанных систем – учебное заведение. Оно включает в себя как материальные части (здание, оборудование, учебники и пр.), так и нематериальные (учебные планы, программы, расписания занятий).

Все разнообразие существующих систем можно разделить на две категории: на естественные системы, т.е.

существующие в природе, и искусственные системы – созданные человеком. Например, Солнечная система – естественная, а компьютер – искусственная система. Для всякой искусственной системы существует цель ее создания человеком: автомобиль – перевозить людей и грузы, компьютер – работать с информацией, завод – производить продукцию. В системологии искусственную систему определяют как «средство достижения цели». Именно целесообразностью системы определяется ее состав и структура.

§ 2. Состав и структура системы

Состав системы – это множество входящих в нее частей.

В качестве примера рассмотрим объект – персональный компьютер.

Самое поверхностное описание ПК такое: это система, составными частями которой являются системный блок, клавиатура, монитор, мышь. Каждая из этих частей – это тоже система, состоящая из множества взаимосвязанных частей. В состав системного блока входят: центральный процессор, оперативная память, накопители на жестких и гибких магнитных дисках, CD-ROM, контроллеры внешних устройств и пр. В свою очередь, каждое из этих устройств – также сложная система. Например, центральный процессор состоит из арифметико-логического устройства, устройства управления, регистров. Так можно продолжать и дальше, все более углубляясь в подробности устройства компьютера.

Систему, входящую в состав какой-то другой, более крупной системы, называют **подсистемой**.

Из данного определения следует, что системный блок является подсистемой персонального компьютера, а процессор – подсистемой системного блока.

А можно ли сказать, что какая-то простейшая деталь компьютера, например гайка, системой не является? Все зависит от точки зрения. В устройстве компьютера гайка – простая деталь, поскольку на более мелкие части она не разбирается. Но с точки зрения строения вещества, из которого сделана гайка, это не так. Металл состоит из молекул, образующих кристаллическую структуру, молекулы – из атомов, атомы – из ядра и электронов. Чем глубже наука проникает в вещество, тем больше убеждается, что нет абсолютно простых объектов. Любой реальный объект бесконечно сложен. Описание его состава и структуры всегда носит модельный характер, т.е. является приближенным. Степень подробности такого описания зависит от его назначения. Одна и та же часть системы в одних случаях может рассматриваться как ее простой элемент, в других случаях – как подсистема, имеющая свой состав и структуру.

Структура системы

Всякая система определяется не только составом своих частей, но также порядком и способом объединения этих частей в единое целое. Все части (элементы) системы находятся в определенных отношениях или связях друг с другом.

Структура – это совокупность связей между элементами системы.

Можно еще определить так: **структура** – это внутренняя организация системы. Многие открытия в науке связаны именно с выяснением структуры природных систем. Всякая система обладает определенным составом и структурой. Свойства системы зависят от того и от другого. Даже при одинаковом составе системы с разной структурой обладают разными свойствами, могут иметь разное назначение.

Типы связей в системах

Связи в системах бывают *материальными* и *информационными*. В естественных системах неживой природы (космические системы, атомы и молекулы, природные системы на Земле и пр.) связи носят только материальный характер, а в системах живой природы существуют связи *материальные* и *информационные*.

Информационные связи – это обмен информацией между частями системы, поддерживающий ее целостность и функциональность.

Очевидно существование информационных связей в животном мире, в человеческом обществе. В технических системах, используемых в информационной сфере (радио, телевидение, компьютерные сети), также действуют связи информационного типа. В них информация – это семантическое содержание физических сигналов, передаваемых между частями системы.

Общественные (социальные) системы – это различные объединения людей. Конечно, между ними тоже есть определенные материальные связи (например, общее помещение, экономическая зависимость, родственно-генетические связи), но очень важны информационные связи. Ни один коллектив, от семьи до государства, не может существовать без информационного обмена.

Появление нового качества у системы называется **системным эффектом**. Это важное положение системологии формулируется так: *всякая система приобретает новые качества, не присущие ее составным частям.*

§ 3. Модели систем

Наши представления о реальных системах носят приближенный, модельный характер. Описывая в какой-либо форме реальную систему, мы создаем ее информационную модель. Рассмотрим три разновидности информационных моделей систем:

– модель «черного ящика»;
– модель состава;
– структурная модель.

Модель «черного ящика». Всякая система – это нечто цельное и выделенное из окружающей среды. Система и среда взаимодействуют между собой. В системологии используются представления о входах и выходах системы. **Вход системы** – это воздействие на систему со стороны внешней среды, а **выход** – это воздействие, оказываемое системой на окружающую среду. Такое представление о системе называется моделью «черного ящика» (рис. 2.1).

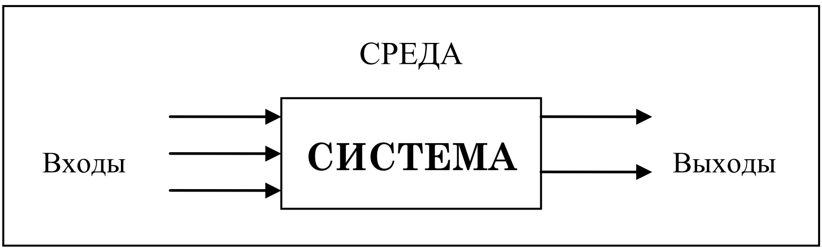


Рис. 2.1. *Модель «черного ящика»*

Модель «черного ящика» используется в тех случаях, когда внутреннее устройство системы недоступно или не представляет интереса, но важно описать ее внешние взаимодействия. Например, в любой инструкции по использованию бытовой техники (телевизор, магнитофон, стиральная машина и пр.) дается описание работы с ней на уровне входов и выходов: как включить, как регулировать работу, что получим на выходе. Такого представления может быть вполне достаточно для пользователя данной техникой, но не достаточно для специалиста по ее ремонту.

Модель «черного ящика» отражает лишь взаимодействие системы с окружающей средой. Такой подход к сложным системам был введен в кибернетике. Казалось бы, это простейшая модель, которая не углубляется во внутреннее устройство системы. Однако и внешние взаимодействия реальной системы оказываются бесконечно сложными. Поэтому модель «черного ящика», как и любая другая, строится в соответствии с целью моделирования, учитывая лишь те входы и выходы системы, которые существенны с точки зрения цели моделирования, назначения создаваемой модели.

Если описать компьютер как “черный ящик”, учитывая только его информационное взаимодействие с внешней средой, то модель получится следующей:

Рис. 2.2. *Модель «черного ящика» компьютера*

Если, кроме информационного, учитывать еще и физическое взаимодействие компьютера с внешней средой, то на входе надо добавить: «электропитание», «температурное воздействие», «вибрационное воздействие». На выходе: «излучение экрана», «шум вентилятора», «нагрев от монитора». В таком расширенном списке входов и выходов следует выделить основные параметры и побочные. Основные – это те, которые связаны с главной функцией системы: работа с информацией. Среди побочных, можно выделить необходимые (электропитание) и нежелательные (излучение экрана, шум вентилятора).

Модель можно расширить, добавив в нее экономические параметры, связанные с финансовыми расходами на входе (исходная цена, оплата электроэнергии, оплата за пользование Интернетом) и возможными доходами на выходе, если компьютер является рабочим инструментом, в результате использования которого человек зарабатывает деньги.

Модель состава системы дает описание входящих в нее элементов и подсистем, но не рассматривает связей между ними. Очевидно, что и модель состава компьютера может иметь разные варианты в зависимости от отражаемой в ней точки зрения на систему. Например:

Вариант 1: системный блок, клавиатура, монитор, мышь.

Вариант 2: оперативная память, внешняя память, центральный процессор, устройства ввода, устройства вывода.

Вариант 3: центральный процессор, ОЗУ, ПЗУ, жесткий диск, информационная магистраль, клавиатура, монитор, контроллеры внешних устройств и пр.

Структурную модель системы еще называют **структурной схемой**. На структурной схеме отражается состав системы и ее внутренние связи. Наряду с термином «связь» нередко употребляют термин «отношение».

Наглядным способом описания структурной модели системы являются графы. На рисунке 2.3 в виде ориентированного графа приведена структурная модель компьютера.

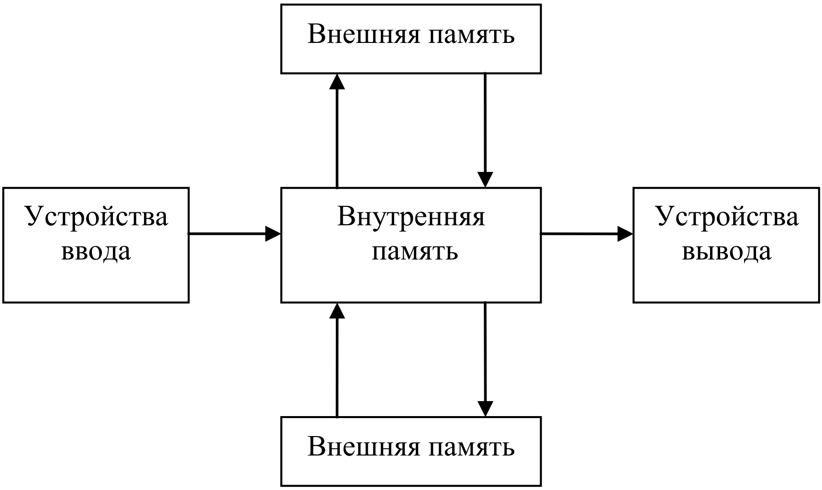


Рис. 2.3. *Структурная модель компьютера с информационными связями*

Здесь стрелки обозначают информационные связи между элементами системы. Направление стрелок указывает на направление передачи информации.

Однако если нас интересуют связи по управлению, то получится следующая модель компьютера:

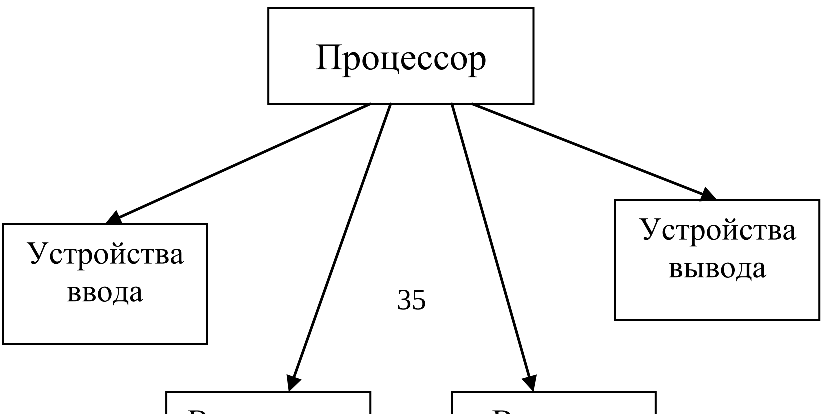


Рис. 2.4. С*труктурная модель компьютера со связями по управлению*

Здесь стрелка обозначает направление управляющего воздействия. Смысл схемы заключается в том, что процессор управляет работой всех остальных устройств компьютера.

Следовательно, структурная модель одной и той же системы может быть разной. Все определяется целями моделирования.

3. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Линейное программирование является составной частью более общего метода – математического программирования. Математическое программирование позволяет находить наилучшие планы распределения ограниченных ресурсов для достижения требуемой цели – решения задачи. Линейное программирование может быть использовано как один из методов оптимизации решения. Наилучший результат здесь достигается не за счет выделения дополнительных сил и средств или иных ресурсов, а за счет их рационального распределения.

§ 1. Общая задача линейного программирования

Задачи оптимального планирования, связанные с отысканием оптимума заданной целевой функции (линейной формы) при наличии ограничений в виде линейных уравнений или линейных неравенств относятся к задачам линейного программирования.

Общей задачей линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения линейной целевой функции:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min)$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{matrix} \geq \\ = \\ \leq \end{matrix} B_i, (i = 1 : m)$$

$$x_j \geq 0, (j = 1 : n)$$

где j – номер переменной;

n – число переменных;

i – номер ограничений;

m – число ограничений;

x_j – переменные (неизвестные);

a_{ij} – технико-экономические коэффициенты при переменных;

c_j – оценки целевой функции;

B_j – объемы ограничений.

При этом система линейных уравнений и неравенств, определяющая допустимое множество решений задачи, называется ***системой ограничений задачи***

линейного программирования, а линейная функция **Z(x)** называется ***целевой функцией***, или ***критерием оптимальности***.

Совокупность чисел $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи, называется ***допустимым решением*** (или планом).

План $\overline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, при котором целевая функция задачи принимает максимальное (минимальное) значение называется ***оптимальным***.

Задачи линейного программирования могут быть записаны в трех формах в зависимости от постановки задачи.

1. ***Стандартная (симметричная) форма записи***:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad\qquad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le B_i, (i = 1:m) \qquad \text{или} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge B_i, (i = 1:m)$$

$$x_j \ge 0, (j = 1:n) \qquad\qquad x_j \ge 0, (j = 1:n)$$

2. ***Основная (каноническая) форма записи***:

$$Z = cx \to \max(\min)$$

$$ax = B, \ x \ge 0$$

3. ***Общая форма записи***: в ней для отдельных ограничений могут присутствовать как знаки равенства, так и знаки неравенства.

Любая форма записи приводит к любой другой.

Например, чтобы перейти от стандартной задачи к канонической необходимо ввести новые переменные, а затем в зависимости от знака неравенства либо прибавить, либо вычесть их из каждого неравенства.

§ 2. Построение экономико-математических моделей задач линейного программирования

Рассмотрим процесс построения математической модели задач линейного программирования на примере.

Задача об использовании ресурсов

Требуется определить, в каком количестве надо выпускать продукцию четырех видов, для изготовления которой требуются ресурсы: трудовые, сырье и материально-денежные затраты. Количество ресурса каждого вида, необходимое для выпуска единицы продукции, называется нормой расхода. Нормы расхода, общее количество ресурсов, а также прибыль, получаемая от реализации единицы каждого вида продукции, указаны в таблице 1.

Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации всех изделий будет максимальной.

Таблица 3.1. *Исходные данные*

Ресурсы	Прод1	Прод2	Прод3	Прод4	Общее количество ресурсов
Трудовые	1	1	1	1	16
Сырье	6	5	4	3	110
МДЗ	4	6	10	13	100
Прибыль	60	70	120	130	-

Экономико-математическая модель
задачи линейного программирования

Система переменных:
x_1 – количество выпускаемой продукции 1 вида
x_2 – количество выпускаемой продукции 2 вида
x_3 – количество выпускаемой продукции 3 вида
x_4 – количество выпускаемой продукции 4 вида

Система ограничений:
1) *по использованию трудовых ресурсов*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 16$$

2) *по использованию сырья*

$$6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 110$$

3) *по использованию материально-денежных затрат*

$$4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \leq 100$$

Условие неотрицательности $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Целевая функция – максимум прибыли от реализации продукции.

$$Z=60x_1 + 70x_2 + 120x_3 + 130x_4 \rightarrow \max$$

§ 3. Решение задач линейного программирования с помощью Поиска решения в MS Excel

1. Создать форму для ввода условий задачи, ввести исходные данные и формулы для вычислений (рис. 3.1).

Рис. 3.1. *Технология решения задачи в Excel*

2. Установить курсор в ячейку F5 и в меню **Сервис** выбрать **Поиск решения**[4]**.** В открывшемся диалоговом окне **Поиск решения** (рис. 3.2) поле **Установить целевую ячейку** будет содержать адрес целевой ячейки $F$5.
3. Установить переключатель **Равной**: выбрать вариант поиска решений – **максимальному значению**.
4. В поле **Изменяя ячейки** указать диапазон ячеек для получения оптимального результата, для этого следует выделить диапазон ячеек B4:E4.
5. Для ввода ограничений щелкнуть по кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне (рис.

---

[4] Если в меню **Сервис** отсутствует команда **Поиск решения**, в этом случае необходимо выполнить команду **Сервис – Надстройки**. Откроется диалоговое окно со списком доступных надстроек. В этом списке следует активизировать элемент **Поиск решения** и щелкнуть по кнопке Ok.

3.3) ввести все ограничения. После ввода последнего ограничения в диалоговом окне **Добавление ограничений** щелкнуть по кнопке Ok. После нажатия кнопки Ok заданные ограничения будут отражены в диалоговом окне **Поиск решения** (рис. 3.2).

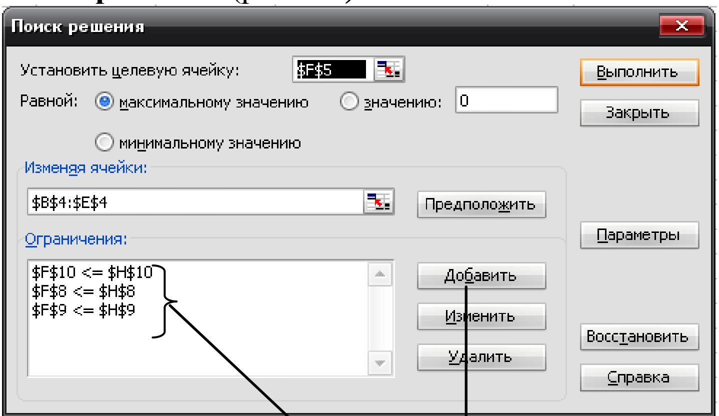


Рис. 3.2. *Диалоговое окно Поиск решения*

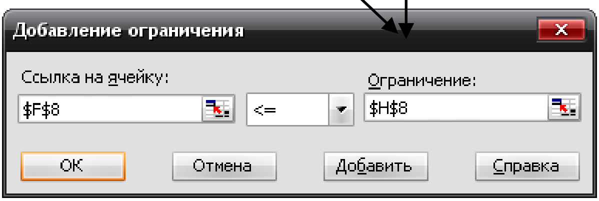


Рис. 3.3. *Диалоговое окно Добавление ограничения*

6. Чтобы удалить ограничение, выделить его в списке **Ограничения** и щелкнуть по кнопке **Удалить**. Для изменения ограничения следует использовать кнопку **Изменить**. После этого появится диалоговое окно **Изменение**

ограничения, аналогичное окну **Добавление ограничения**.

7. Настроить параметры решения задачи, для этого следует щелкнуть по кнопке **Параметры,** в открывшемся диалоговом окне **Параметры поиска решения** (рис. 3.4) установить флажок **Линейная модель** для ускорения поиска решения линейной задачи за счет применение симплекс-метода и получения стандартного отчета по устойчивости, установить флажок **Неотрицательные значения** для выполнения ограничения неотрицательности переменных.

Подтвердить установленные параметры нажатием кнопки Ok.

8. Запустить задачу на выполнение щелчком по кнопке **Выполнить.**
9. В случае успешного завершения решения задачи на экране появится диалоговое окно **Результаты поиска решения** (рис. 3.5), в котором сообщается о найденном решении задачи. Выбрать переключатель *Сохранить найденное решение* и щелкнуть по кнопке Ok.

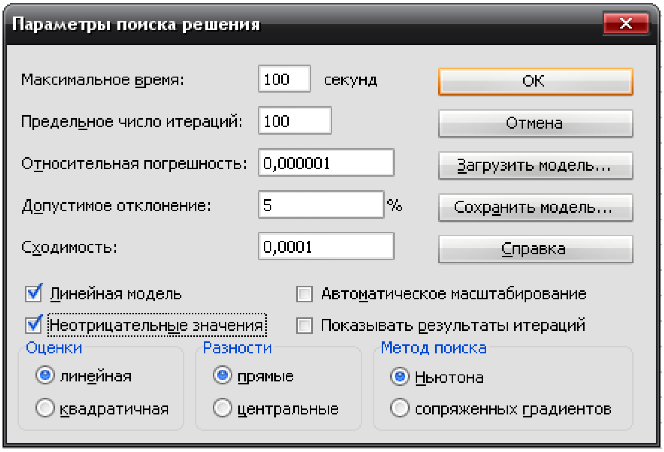


Рис. 3.4. *Диалоговое окно*
Параметры поиска решения

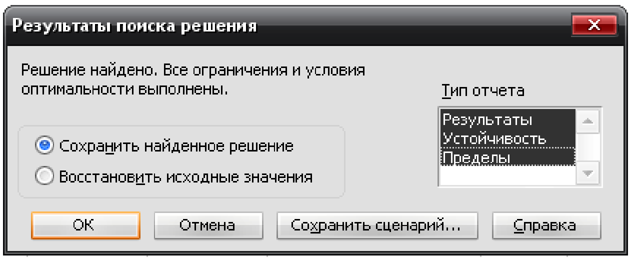


Рис. 3.5. *Сообщение об успешном решении задачи*

Примечание:

➢ Основные параметры, которые задаются в диалоговом окне **Параметры поиска решения** (рис. 3.4):

– **Максимальное время** – максимальное время, в секундах, отведенное на поиск решения задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32 767 секунд (9 часов). Значение 100, используемое по умолчанию, подходит для решения большинства задач.

– **Предельное число итераций** – максимальное количество итераций, возможных в течение поиска конечного результата.
– **Относительная погрешность** – точность результата. Чем *меньше* количество десятичных знаков во введенном числе, тем *ниже* точность.
– **Допустимое отклонение** – величина допуска на отклонение от оптимального решения в целочисленных задачах. При указании большего допуска поиск решения заканчивается быстрее.
– **Сходимость** – значение относительного изменения, при достижении которого в последних пяти итерациях поиск решения прекращается. Данный параметр применяется при решении нелинейных задач.

➢ Возможные сообщения **Поиск не может найти подходящего решения** или **Значения целевой ячейки не сходятся** в диалоговом окне рис. 3.5 свидетельствуют о том, что при вводе условий задачи были допущены **ошибки**, не позволяющие Excel найти оптимальное решение, которое в действительности существует.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1				Задача об использовании ресурсов				
2								
3	Переменные	x1	x2	x3	x4			
4	Значения	**10**	**0**	**6**	**0**	Значение Z		
5	Прибыль	60	70	120	130	**1320**		
6								
7	Ограничения		Коэффициенты			Расход ресурса	Знак	Наличие ресурса
8	Трудовые ресурсы	1	1	1	1	**16**	<=	16
9	Сырье	6	5	4	3	**84**	<=	110
10	МДЗ	4	6	10	13	**100**	<=	100

Рис. 3.6. *Результаты поиска решения задачи*

Анализ оптимального решения

Анализ оптимального решения (рис. 3.6) показывает, что предприятие получит максимальную прибыль в размере 1320 денежных единиц, если будет выпускать продукцию первого вида в объеме 10 единиц и продукцию третьего вида – 6 единицы, продукцию второго и четвертого вида производить не выгодно. Таким образом, трудовые ресурсы и материально-денежные затраты используются полностью, а сырье – недоиспользуется в объеме 26 единиц.

С помощью диалогового окна **Результаты поиска решения** (рис. 3.5) можно создать отчеты трех типов:

- ✓ результаты;
- ✓ устойчивость;
- ✓ пределы.

Для того чтобы сохранить результаты работы процедуры поиска решения в виде отчета, необходимо тип отчета выбрать из списка в диалоговом окне **Результаты поиска решения**. Каждый отчет создается на отдельном листе.

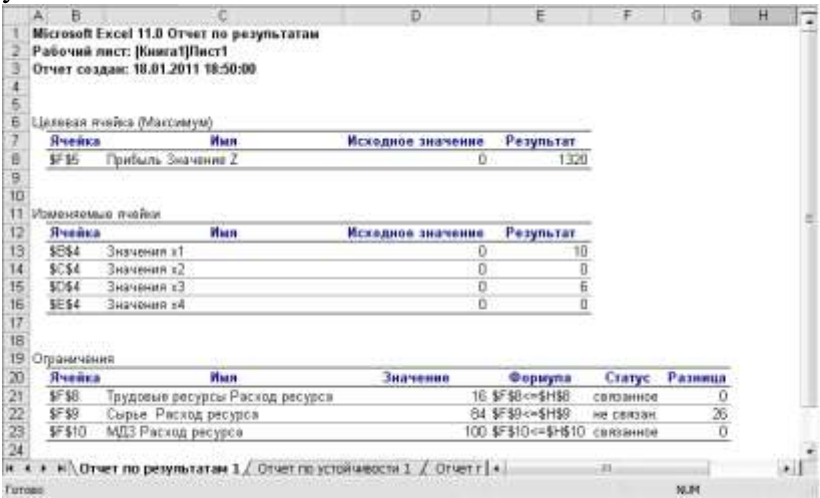
Отчет по результатам состоит из трех таблиц и представлен на рис. 3.7.

таблица 1. приводит сведения о целевой функции. В столбце Исходное значение приведены значения целевой функции до начала вычислений.

таблица 2. приводит значения искомых переменных, полученные в результате решения задачи.

таблица 3. показывает результаты оптимального решения для ограничений и граничных условий.

Для *Ограничений* в столбце **Формулы** (табл. 3) приведены ограничения, которые были введены в диалоговом окне **Поиск решения**, в столбце **Значение** приведены значения использованного ресурса; в столбце **Разница** отражено количество неиспользованного ресурса. Если ресурс используется полностью, то в столбце **Статус** указывается *связанное*, при неполном использовании ресурса указывается – *не связан*.



Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Книга1]Лист1
Отчет создан: 18.01.2011 18:50:00

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$F$5	Прибыль Значение Z	0	1320

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$4	Значения x1	0	10
$C$4	Значения x2	0	0
$D$4	Значения x3	0	6
$E$4	Значения x4	0	0

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$F$8	Трудовые ресурсы Расход ресурса	16	$F$8<=$H$8	связанное	0
$F$9	Сырье Расход ресурса	84	$F$9<=$H$9	не связан.	26
$F$10	МДЗ Расход ресурса	100	$F$10<=$H$10	связанное	0

Рис. 3.7. *Отчет по результатам*

Отчет по устойчивости состоит из двух таблиц.

В таблице 1 приводятся следующие значения для переменных:

– результат решения задачи;
– нормированная стоимость, т.е. дополнительные переменные, которые показывают, насколько изменяется целевая функция при принудительном включении единицы этого вида продукции в оптимальное решение;
– коэффициенты целевой функции;
– предельные значения приращения коэффициентов целевой функции, при которых сохраняется набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости
Рабочий лист: [Книга1]Лист1
Отчет создан: 18.01.2011 18:50:00

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$B$4	Значения x1	10	0	60	40	12
$C$4	Значения x2	0	-10	70	10	1E+30
$D$4	Значения x3	6	0	120	30	13,33333333
$E$4	Значения x4	0	-20	130	20	1E+30

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
$F$8	Трудовые ресурсы Расход ресурса	16	20	16	3,545454545	6
$F$9	Сырье Расход ресурса	84	0	110	1E+30	26
$F$10	МДЗ Расход ресурса	100	10	100	60	36

Отчет по устойчивости 1 / Отчет по пределам 1 / Лист1 / Лист2 /
Готово NUM

Рис. 3.8. *Отчет по устойчивости*

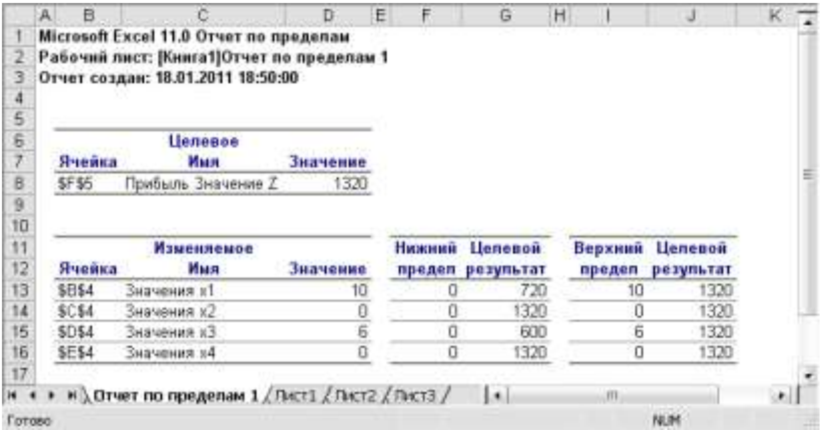
В таблице 2 приводятся значения для ограничений:

- величина использованных ресурсов;
- теневая цена, т.е. двойственные оценки, которые показывают, как изменится целевая функция при изменении ресурсов на единицу;
- значения приращения ресурсов, при которых сохраняется оптимальный набор переменных, входящих в оптимальное решение.

Отчет по пределам представлен на рис. 3.9.

В нем показано, в каких пределах может изменяться выпуск продукции, вошедший в оптимальное решение, при сохранении структуры оптимального решения:

- приводятся значения x_j в оптимальном решении;
- приводятся нижние пределы изменения значений x_j.



Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам
Рабочий лист: [Книга1]Отчет по пределам 1
Отчет создан: 18.01.2011 18:50:00

Ячейка	Целевое Имя	Значение
$F$5	Прибыль Значение Z	1320

Ячейка	Изменяемое Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат
$B$4	Значения x1	10	0	720	10	1320
$C$4	Значения x2	0	0	1320	0	1320
$D$4	Значения x3	6	0	600	6	1320
$E$4	Значения x4	0	0	1320	0	1320

Отчет по пределам 1 / Лист1 / Лист2 / Лист3

Рис. 3.9. *Отчет по пределам*

Кроме этого, в отчете указаны значения целевой функции при выпуске данного вида продукции на нижнем пределе.

Так, при значении 720 видно, что Z = $c_1x_1 + c_3x_3$ = 60·0 + 120·6 = 720. Далее приводятся верхние пределы изменения $\boldsymbol{x_j}$ и значения целевой функции при выпуске продукции, вошедшей в оптимальное решение на верхних пределах.

Поэтому везде Z = 60·10 + 120·6 = 1320.

§ 4. Двойственные задачи линейного программирования

Каждой задаче линейного программирования соответствует другая задача, называемая **двойственной задачей** по отношению к исходной.

Теория двойственности оказалась полезной для проведения качественных исследований задач линейного программирования.

Правила составления задачи, двойственной исходной:

1. Привести все неравенства системы ограничений исходной задачи к одному виду, а именно: если в исходной задаче ищется максимум линейной формы (Z), то все неравенства системы ограничений привести к виду $\leq$, а если минимум – то к виду $\geq$. Для этого неравенства, в которых это требование не выполняется, умножить на (–1).
2. Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в прямой задаче.
3. Матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи получается из матрицы коэффициентов системы ограничений прямой задачи путем транспонирования.
4. Система ограничений двойственной задачи записывается в виде неравенств противоположного смысла неравенствам системы ограничений прямой задачи.
5. Свободными членами системы ограничений двойственной задачи являются коэффициенты целевой функции прямой задачи.
6. На каждую переменную двойственной задачи накладывается условие неотрицательности.
7. Двойственная задача решается на минимум, если целевая функция прямой задачи задается на максимум, и наоборот. Важное свойство двойственной задачи заключается в том, что $Z_{max} = F_{min}$.
8. Коэффициентами целевой функции двойственной задачи служат свободные члены системы ограничений прямой задачи.

Пример. Составим двойственную задачу к прямой задаче, которая рассмотрена в §2.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 16 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 \le 110 \\ 4x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 13x_4 \le 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$\mathbf{Z = 60}\boldsymbol{x_1}\mathbf{ + 70}\boldsymbol{x_2}\mathbf{ + 120}\boldsymbol{x_3}\mathbf{ + 130}\boldsymbol{x_4} \rightarrow \mathbf{max}$$

Число переменных в двойственной задаче будет равно числу ограничений в прямой задаче, т.е. 3 – y_1, y_2, y_3.

Матрица коэффициентов системы ограничений прямой задачи:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 10 & 13 \end{pmatrix}$$

Матрица коэффициентов системы ограничений двойственной задачи:

$$A^{т} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 10 \\ 1 & 3 & 13 \end{pmatrix}$$

Свободными членами системы ограничений двойственной задачи являются коэффициенты целевой функции прямой задачи – 60, 70, 120, 130.

Коэффициентами целевой функции двойственной задачи служат свободные члены системы ограничений прямой задачи – 16, 110, 100.

Сформулируем двойственную задачу:

Определить $Y = (y_1, y_2, y_3)$, который удовлетворяет ограничениям:

$$\begin{cases} 1y_1 + 6y_2 + 4y_3 \geq 60 \\ 1y_1 + 5y_2 + 6y_3 \geq 70 \\ 1y_1 + 4y_2 + 10y_3 \geq 120 \\ 1y_1 + 3y_2 + 13y_3 \geq 130 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

и обеспечивает минимальное значение целевой функции:

$$\mathbf{F = 16y_1 + 110y_2 + 100y_3 \rightarrow min}$$

Экономическая интерпретация двойственной задачи

В литературе по оптимизации двойственные переменные принято называть ***двойственными оценками***. В отчете по устойчивости Excel двойственная оценка называется ***теневой ценой***.

Итак, двойственные оценки вытекают из двойственности задач линейного программирования. Они были открыты академиком Л.В. Канторовичем и названы объективно обусловленными. Он же впервые охарактеризовал их экономическое содержание и основные свойства. Двойственные оценки являются оптимальным базисом двойственной задачи. Из теории известно, что одновременно с решением прямой задачи линейного программирования решается задача, в которой искомыми величинами являются двойственные оценки. Двойственные оценки являются важным инструментом анализа оптимального решения. Они характеризуют эффективность ресурсов, продукции, способов использования ресурсов с позиций принятого критерия оптимальности в условиях конкретной задачи.

Экономическое содержание оценок определяется содержанием критерия оптимальности и того условия, которое они оценивают. Единицу измерения двойственные оценки имеют ту же, что и целевая функция.

Ограничения типа «меньше или равно» могут иметь ненулевые и нулевые двойственные оценки. Ненулевая оценка свидетельствует о выполнении ограничения в полном объеме и характеризует эффективность единицы ресурса, продукции. Она показывает, насколько увеличивается (уменьшается) функционал при увеличении (уменьшении) объема ограничения на единицу. Нулевая оценка свидетельствует о неполном использовании ресурса.

Ограничения типа «больше или равно» могут также иметь как ненулевые оценки, так и нулевые. Ненулевые оценки свидетельствуют о целесообразности смягчения ограничения, так как при увеличении объема ограничения на единицу функционал ухудшится на величину оценки. Нулевая оценка указывает на то, что условие эффективно и что изменение объема ограничения не окажет влияния на величину функционала.

Очень существенно, что для нахождения двойственных оценок двойственную задачу решать не требуется. Их значения представлены в отчете по устойчивости столбец – теневая цена (рис. 3.8 стр. 47).

Проанализируем конкретное содержание полученных двойственных оценок и их влияние на целевую функцию.

Таблица 3.2. *Двойственные оценки ограничений*

Ограничения	Знак и объем ограничения	Значения двойственных оценок (y)
Трудовые ресурсы	≤ 16	20
Сырье	≤ 110	0
Материально-	≤ 100	10

денежные затраты		

Ненулевые двойственные оценки в ограничениях по использованию трудовых ресурсов и материально-денежных затрат свидетельствуют о выполнения ограничения в полном объеме и характеризуют эффективность единицы ресурса. Так при увеличении (уменьшении) трудовых ресурсов на единицу целевая функция (прибыль) увеличится (уменьшится) на 20 ден. ед. и будет равна:

при увеличении $Z = 1320 + 20 \cdot 1 = 1340$

при уменьшении $Z = 1320 - 20 \cdot 1 = 1300$

Аналогично обстоит дело и с материально-денежными затратами, при увеличении (уменьшении) их на единицу прибыль возрастет (уменьшится) на 10 ден. ед.

Нулевая оценка в ограничении по использованию сырья свидетельствует о неполном использовании ресурса, из возможных 110 единиц используется 84, недоиспользуется сырье в объеме 26 единиц.

4. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В сельском хозяйстве значительную часть общих затрат на производство продукции составляют транспортные издержки. Поэтому рациональное сокращение этого рода затрат является одним из путей повышения эффективности сельскохозяйственного производства.

Транспортная задача принадлежит к классу задач линейного программирования, которая имеет специфическую экономико-математическую модель и решается, как правило, не универсальным симплексным методом, а с помощью так называемого **распределительного метода** и его различных модификаций.

§ 1. Закрытая модель транспортной задачи

Постановка задачи. Из нескольких пунктов отправления требуется перевезти определенное количество груза в несколько пунктов назначения. Известно имеющееся количество груза в каждом пункте отправления и требуемое количество груза в пунктах назначения, а также расстояние (себестоимость) перевозки единицы груза. Требуется определить план перевозок груза из пунктов отправления в пункты назначения так, чтобы: вывезти весь груз от поставщиков, удовлетворить заявки каждого потребителя и обеспечить минимальные транспортные затраты на перевозку груза.

Математическая постановка транспортной задачи

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \,(j = \overline{1, n})$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \,(i = \overline{1, m})$$

$$x_{ij} \geq 0, \text{ где } (\mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{m}};\ \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{n}})$$

где:

i – номер поставщика;

m – число поставщиков;

j – номер потребителя;

n – число потребителей;

x_{ij} – количество груза, распределяемого от i-го поставщика j-му потребителю;

c_{ij} – затраты на единицу распределяемого груза;

a_i – наличие груза у i-*го* поставщика;

b_j – потребность в грузе j-го потребителя.

Если общая потребность в грузе в пунктах назначения равна запасу груза в пунктах отправления, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

то **модель** такой транспортной задачи называется **закрытой**.

Построение закрытой модели транспортной задачи

Задача. С двух хранилищ хозяйства требуется перевезти корма на три фермы. При этом на 1-ом хранилище – 180 т кормов, на 2-ом – 260 т. На первую ферму необходимо перевезти 100 т, на 2-ую – 120 т, на 3-ю – 220 т. Расстояния (км) от хранилищ до ферм приведены в табл. 1. Требуется составить такой план перевозок, при котором транспортные затраты будут минимальными.

Таблица 4.1. *Расстояние от хранилищ до ферм, км*

Ферма / Хранилище	**1**	**2**	**3**
1	2	2	3
2	3	4	2

Составим вспомогательную таблицу для построения математической модели и решения транспортной задачи в Excel.

Таблица 4.2. *Исходные данные для построения модели*

Ферма / Хранилище	**1**	**2**	**3**	Наличие кормов
1	2 x_{11}	2 x_{12}	3 x_{13}	180
2	3 x_{21}	4 x_{22}	2 x_{23}	260
Потребность в кормах	100	120	220	Баланс 440=440

В данной задаче выполняется условие баланса (наличие кормов на хранилищах хозяйства равно суммарным потребностям ферм).

Экономико-математическая модель закрытой транспортной задачи

Система переменных:

x_{11} – количество перевозимых кормов с 1 хранилища на 1 ферму;

x_{12} – количество перевозимых кормов с 1 хранилища на 2 ферму;

x_{13} – количество перевозимых кормов с 1 хранилища на 3 ферму;

x_{21} – количество перевозимых кормов с 2 хранилища на 1 ферму;

x_{22} – количество перевозимых кормов с 2 хранилища на 2 ферму;

x_{23} – количество перевозимых кормов с 2 хранилища на 3 ферму.

Система ограничений:

1. *Ограничения по наличию кормов*

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 180$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 260$$

2. *Ограничения по потребности в кормах*

$$x_{11} + x_{21} = 100$$
$$x_{12} + x_{22} = 120$$
$$x_{13} + x_{23} = 220$$

Условие неотрицательности $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0$

Целевая функция (Z) – минимум транспортных затрат на перевозку кормов (ткм).

$$Z = 2x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 3x_{21} + 4x_{22} + 2x_{23} \rightarrow \min$$

§ 2. Решение транспортной задачи с помощью Поиска решения в MS Excel

1. Создать форму для ввода условий задачи, ввести исходные данные и формулы для вычислений (рис. 4.1).

2. Установить курсор в ячейку E15 и в меню **Сервис** выбрать **Поиск решения**. В открывшемся диалоговом окне **Поиск решения** (рис. 4.2) поле **Установить целевую ячейку** будет содержать адрес целевой ячейки $E$15.
3. Установить переключатель **Равной**: выбрать вариант поиска решений – **минимальному значению**.

	A	B	C	D	E
1			**Исходные данные**		
2	Поставщик		Потребитель		Наличие кормов
3		Ферма 1	Ферма 2	Ферма 3	
4	Хранилище 1	2	2	3	180
5	Хранилище 2	3	4	2	260
6	Потребность в кормах	100	120	220	440
7					
8					
9			**Решение задачи**		
10	Поставщик		Потребитель		Наличие кормов
11		Ферма 1	Ферма 2	Ферма 3	
12	Хранилище 1	1	1	1	=СУММ(B12:D12)
13	Хранилище 2	1	1	1	=СУММ(B13:D13)
14	Потребность в кормах	=СУММ(B12:B13)	=СУММ(C12:C13)	=СУММ(D12:D13)	
15	Минимум затрат				**=СУММПРОИЗВ(B4:D5;B12:D13)**

Рис. 4.1. *Технология решения транспортной задачи в Excel*

4. В поле **Изменяя ячейки** указать диапазон ячеек для получения оптимального результата, для этого следует выделить диапазон ячеек B12:D13.
5. Для ввода ограничений щелкнуть по кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне (рис. 4.3) ввести все ограничения. После ввода последнего ограничения в диалоговом окне **Добавление ограничений** щелкнуть по кнопке Ok. После нажатия кнопки Ok заданные ограничения будут отражены в диалоговом окне **Поиск решения** (рис. 4.2).
6. Установить параметры инструмента **Поиск решения:**

Подтвердить установленные параметры нажатием кнопки Ok.

7. Запустить задачу на выполнение щелчком по кнопке **Выполнить** и сохранить оптимальное решение.
8. Решение задачи представлено на рис. 4.4.

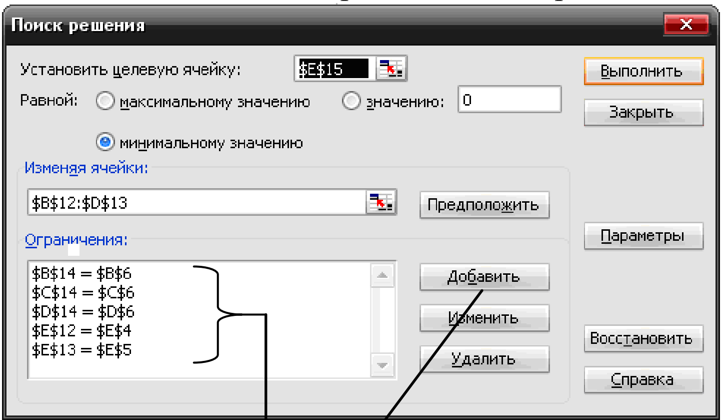


Рис. 4.2. *Диалоговое окно Поиск решения*

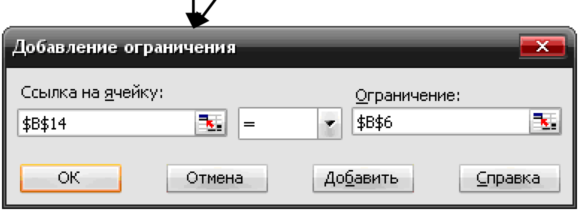


Рис. 4.3. Диалоговое окно Добавление ограничения

	A	B	C	D	E
1	**Исходные данные**				
2	Поставщик	Потребитель			Наличие кормов
3		Ферма 1	Ферма 2	Ферма 3	
4	Хранилище 1	**2**	**2**	**3**	180
5	Хранилище 2	**3**	**4**	**2**	260
6	Потребность в кормах	100	120	220	440
7					
8					
9	**Решение задачи**				
10	Поставщик	Потребитель			Наличие кормов
11		Ферма 1	Ферма 2	Ферма 3	
12	Хранилище 1	**60**	**120**	**0**	180
13	Хранилище 2	**40**	**0**	**220**	260
14	Потребность в кормах	100	120	220	
15	Минимум затрат				**920**

Рис. 4.4. *Результаты решения транспортной задачи*

§ 3. Открытая модель транспортной задачи

Если общая потребность в грузе в пунктах назначения не равна запасу груза в пунктах отправления, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

то **модель** такой транспортной задачи называется **открытой**.

В таких задачах $\sum_i a_i > \sum_j b_j$ или $\sum_i a_i < \sum_j b_j$.

Если $\sum_i a_i > \sum_j b_j$, то вводится фиктивный ($n+1$) потребитель b_{n+1}. Для этого в матрицу задачи вводят один столбец, для которого потребность равна разности между суммарной мощностью поставки и фактическим спросом потребителей:

$$b_{n+1} = \sum_i a_i$$

Все тарифы на доставку груза этому потребителю равны нулю. Этим самым открытая модель задачи преобразуется в закрытую.

Аналогично для случая $\sum_i a_i < \sum_j b_j$ вводят фиктивного поставщика a_{m+1}.

Построение открытой модели транспортной задачи

Рассмотрим процесс построения математической модели транспортной задачи открытого типа на **примере**. Для этого изменим условие предыдущей задачи таким образом, чтобы запасы кормов превышали потребности в них ферм. Пусть потребности трех ферм поменялись и составляют соответственно: **100, 100, 200** т. В этом случае суммарная потребность ферм будет равна **100+100+200=400** т. Суммарный запас кормов в хранилищах не меняется и составляет: **180+260=440** т.

Таким образом, излишек кормов в хранилищах составит:

440–400=40 т – задача несбалансированна, т.е. является открытой транспортной задачей.

Перед решением *открытой транспортной задачи* ее необходимо привести к закрытому типу, путем ввода фиктивного потребителя (ферму), которая будет формально потреблять излишек кормов (фиктивная потребность этой фермы составит **40 т**). Расстояния от хранилищ до ферм в данном случае принимается равные 0.

Таблица 4.3. *Исходные данные для построения модели открытой транспортной задачи*

Ферма / Хранилище	**1**	**2**	**3**	**фиктивная**	Наличие кормов
1	2 x_{11}	2 x_{12}	3 x_{13}	0 x_{14}	180

2	3 x_{21}	4 x_{22}	2 x_{23}	0 x_{24}	260
Потребность в кормах	100	100	200	**40**	Баланс 440=440

Экономико-математическая модель открытой транспортной задачи

Система переменных:

x_{11} – количество перевозимых кормов с 1 хранилища на 1 ферму;

x_{12} – количество перевозимых кормов с 1 хранилища на 2 ферму;

x_{13} – количество перевозимых кормов с 1 хранилища на 3 ферму;

x_{14} – количество перевозимых кормов с 1 хранилища на фиктивную ферму;

… … …

x_{24} – количество перевозимых кормов с 2 хранилища на фиктивную ферму.

Система ограничений:

1. *Ограничения по наличию кормов*

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 180$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 260$$

2. *Ограничения по потребности в кормах*

$$x_{11} + x_{21} = 100$$
$$x_{12} + x_{22} = 100$$
$$x_{13} + x_{23} = 200$$
$$x_{14} + x_{24} = 40$$

Условие неотрицательности

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24} \geq 0$$

Целевая функция (Z) – минимум транспортных затрат на перевозку кормов (ткм).

$$Z = 2x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 0x_{14} + 3x_{21} + 4x_{22} + 2x_{23} + 0x_{24} \rightarrow \min$$

Дальнейшее нахождение решения модели открытой транспортной задачи производится аналогично рассмотренной выше методике в §2. Результаты решения открытой транспортной задачи представлены на рис. 4.5.

Полученное решение позволяет оценить, сколько кормов необходимо оставить в хранилищах, удовлетворив при этом потребности всех ферм и выполнив перевозки с минимальными затратами.

	A	B	C	D	E	F
1			Исходные данные			
2	Поставщик	Потребитель				Наличие кормов
3		ферма 1	ферма 2	ферма 3	фиктивная	
4	Хранилище 1	2	2	3	0	180
5	Хранилище 2	3	4	2	0	260
6	Потребность в кормах	100	100	200	40	440
7						
8						
9			Решение задачи			
10	Поставщик	Потребитель				Наличие кормов
11		ферма 1	ферма 2	ферма 3	фиктивная	
12	Хранилище 1	80	100	0	0	180
13	Хранилище 2	20	0	200	40	260
14	Потребность в кормах	100	100	200	40	
15	Минимум затрат					820

Рис. 4.5. *Результаты решения открытой транспортной задачи*

5. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

§ 1. Постановка задачи

Задачи, в которых оптимизацию проводят по нескольким параметрам, называют задачами ***многокритериальной*** или ***векторной оптимизации***. Многокритериальная оптимизация представляет собой попытку найти некоторый компромисс между теми параметрами, по которым требуется оптимизировать решение.

Важным элементом при такой оптимизации является назначение коэффициентов веса каждого оптимизируемого параметра. Распространенный метод – определение коэффициентов веса с помощью экспертов, который представляет собой, по существу, обычное обсуждение, с той лишь разницей, что свое мнение эксперты выражают не словами, а цифрами.

Непосредственное назначение коэффициентов веса

При непосредственном назначении коэффициентов веса каждый эксперт оценивает сравнительную важность рассматриваемых параметров, которые будут входить в целевую функцию. В этом методе каждый i-ый эксперт для каждого k-го параметра должен назначить коэффициент веса a_{ik} таким образом, чтобы сумма всех коэффициентов веса, назначенных одним экспертом для различных параметров, равнялась единице. Это требование можно записать так:

$$\sum_{k=1}^{K} a_{ik} = 1; \qquad i = \overline{1, n}$$

где n – число экспертов.

Алгоритм назначения коэффициентов веса

1. Определить число параметров K, которые будут включены в целевую функцию.
2. Создать базовую таблицу по форме, представленной на рис. 5.1.
   – Ввести функции Excel, определяющие среднее значение, среднее квадратическое отклонение, дисперсию, как это показано на рис. 5.1 в ячейках B12:E14.
   – В ячейки B15:E15 ввести формулы для определения коэффициента вариабильности.
3. Значения коэффициентов веса, назначаемые каждым экспертом, ввести в ячейки B4:E11.

	A	B	C	D	E	F
1	**Базовая таблица**					
2	Эксперт	Параметры				Сумма
3		**1**	**2**	**...**	**k**	
4	**1**					1,0
5	**2**					1,0
6	**3**					1,0
7	**4**					1,0
8	**5**					1,0
9	**6**					1,0
10	...					1,0
11	**n**					1,0
12	коэффициент веса	=СРЗНАЧ(B4:B11)	=СРЗНАЧ(C4:C11)		=СРЗНАЧ(E4:E11)	
13	среднее квадратическое отклонение	=СТАНДОТКЛОН(B4:B11)	=СТАНДОТКЛОН(C4:C11)		=СТАНДОТКЛОН(E4:E11)	
14	дисперсия	=ДИСП(B4:B11)	=ДИСП(C4:C11)		=ДИСП(E4:E11)	
15	коэффициент вариабельности	=B13/B12	=C13/C12		=E13/E12	

Рис. 5.1. *Базовая таблица для назначения коэффициентов веса*

Значение коэффициента вариабельности (v) показывает величину разброса экспертных оценок. При $v \le 0,2$ оценки экспертов можно считать согласованными. В случае $v > 0,2$ целесообразно провести с экспертами содержательное обсуждение важности оцениваемых параметров, после чего повторить экспертизу.

Рассмотрим пример, в котором принято число параметров три: **А**, **В**, **С** и число экспертов 8 ($n = 8$). Заполним базовую таблицу и выполним вычисления.

	A	B	C	D	E
1	**Базовая таблица**				
2	Эксперт	Параметры			Сумма
3		**А**	**В**	**С**	
4	**1**	0,5	0,2	0,3	1,0
5	**2**	0,5	0,3	0,2	1,0
6	**3**	0,2	0,4	0,4	1,0
7	**4**	0,2	0,3	0,5	1,0
8	**5**	0,4	0,2	0,4	1,0
9	**6**	0,3	0,4	0,3	1,0
10	**7**	0,3	0,3	0,4	1,0
11	**8**	0,5	0,2	0,3	1,0
12	**коэффициент веса**	**0,36**	**0,29**	**0,35**	

Как показывает опыт, удовлетворение экспертами требования

$$\sum_{k=1}^{K} a_k = 1$$

при К > 3, вызывает затруднение.

Для того чтобы избежать выполнения этого требования, можно коэффициенты веса определять и другими методами[5]:

- оценка важности параметров в баллах;
- метод парных сравнений.

§ 2. Обобщенная целевая функция

Возможной реализацией многокритериальной оптимизации является обобщенная целевая функция $Z_{об}$, которая записывается следующим образом:

$$Z_{об} = \sum_{k=1}^{S} \alpha_k \frac{Z_k}{Z_k^{норм}} \rightarrow \max$$

где Z_k – k-ая целевая функция,

$Z_k^{норм}$ – нормирующее значение k-ой целевой функции,

S – число составляющих целевых функций,

[5] Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. – СПб.: BHV – Санкт-Петербург, 1997. – С.240 – 243.

α_k – коэффициент веса k-ой целевой функции.

При этом перед составляющими целевой функции, которые максимизируются, ставится знак плюс, перед минимизуруемыми – минус.

Для формирования обобщенной целевой функции необходимо знать α_k и $Z_k^{норм}$. Значения $Z_k^{норм}$ принимаются при максимизации k-ой составляющей целевой функции:

$$Z_k^{норм} = Z_k^{\max},$$

при ее минимизации

$$Z_k^{норм} = Z_k^{\min}.$$

Рассмотрим решение задачи по обобщенной целевой функции.

Оптимизация по обобщенной целевой функции

1. Ввести условия задачи и формулы, как указано на рис. 5.2.

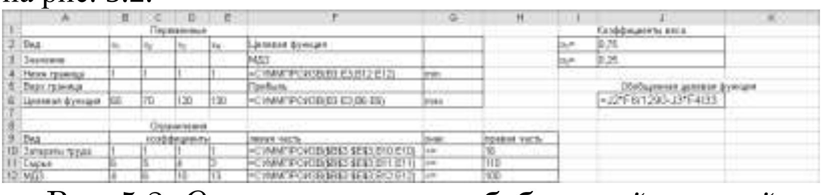


Рис. 5.2. *Оптимизация по обобщенной целевой функции*

2. Определить, какие составляющие целевые функции будут входить в обобщенные. Принимаем:

Z_1 (ЦФ1) – максимизация прибыли,

Z_2 (ЦФ2) – минимизация материально-денежных затрат (МДЗ).

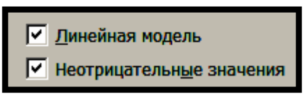
3. При минимизации хотя бы для одной составляющей необходимо ввести нижние границы значений переменных. Ввести нижнюю границу, равную 1 в диапазон ячеек B4:E4.

4. Решить задачу на максимум прибыли:

– установить курсор в ячейку F6 и в меню **Сервис** выбрать **Поиск решения**;
– установить переключатель **Равной**: выбрать вариант поиска решений – **максимальному значению**;
– в поле **Изменяя ячейки** указать диапазон ячеек для получения оптимального результата, для этого следует выделить диапазон ячеек B3:E3;
– для ввода ограничений щелкнуть по кнопке **Добавить** и в открывшемся диалоговом окне ввести все ограничения:

✓ $F$10 <= $H$10
✓ $F$11 <= $H$11
✓ $F$12 <= $H$12
✓ $B$3: $E$3 >= $B$4:$E$4

– после нажатия кнопки Ok заданные ограничения будут отражены в диалоговом окне **Поиск решения**;
– установить параметры инструмента **Поиск решения:**



– подтвердить установленные параметры нажатием кнопки Ok.
– запустить задачу на выполнение щелчком по кнопке **Выполнить** и сохранить оптимальное решение;
– на экране результат решения задачи Z_1 = 1290 (ЦФ1 – max прибыли).

5. Решить задачу на минимум МДЗ – установить курсор в ячейку F4 и в меню **Сервис** выбрать **Поиск решения** – **Выполнить**. Сохранить найденное решение. На экране результат решения задачи Z_2 = 33 (ЦФ2 – min МДЗ).

6. Провести экспертизу и определить коэффициенты веса. Принимаем α_1=0,75; α_2=0,25. Ввести эти данные, как показано на рис. 1, в ячейки J2:J3.

7. Сформулировать обобщенную целевую функцию и ввести формулу для ее вычисления в ячейку J6

=J2*F6/1290-J3*F4/33

Решить задачу по обобщенной целевой функции на максимум, при этом установить курсор в ячейку J6 и в меню **Сервис** выбрать **Поиск решения** – **Выполнить**.

Результаты решения по трем целевым функциям представим в таблице 5.1.

Таблица 5.1. *Результаты решения модели Оптимизация по обобщенной целевой функции*

Величина	**Прибыль →** *max*	**МДЗ →** *min*	**Обобщенная ЦФ** α_1=0,75;

			α_2=0,25
Прибыль	**1290**	380	**1100**
МДЗ	100	**33**	**81**
Продукция1 (x_1)	9.8	1.0	13.0
Продукция2 (x_2)	1.0	1.0	1.0
Продукция3 (x_3)	4.2	1.0	1.0
Продукция4 (x_4)	1.0	1.0	1.0

Из этой таблицы видно следующее:

- ✓ При решении по обобщенной целевой функции величины прибыли и материально-денежных затрат имеют промежуточные значения по сравнению с решением по составляющим целевым функциям.
- ✓ Такое положение не распространяется на значения переменных.

6. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 1. Основные понятия нелинейного программирования

Нелинейное программирование – раздел математического программирования, изучающий методы решения экстремальных задач с нелинейной целевой функцией и (или) областью допустимых решений, определенной нелинейными ограничениями. В экономике это соответствует тому, что результаты (эффективность) возрастают или убывают непропорционально изменению масштабов использования ресурсов (или, что то же самое, масштабов производства): например, из-за деления издержек производства на предприятиях на переменные и условно-постоянные; из-за насыщения спроса на товары, когда каждую следующую единицу продать труднее, чем предыдущую и т.д.

В краткой форме задачу нелинейного программирования можно записать так:

$$Z(x) \to \max(\min) \text{ при условиях } g(x) \le b,\ x \ge 0,$$

где x – вектор искомых переменных;

Z (x) – целевая функция;

g (x) – функция ограничений (непрерывно дифференцируемая);

b – вектор констант ограничений (выбор знака ≤ в первом условии здесь произволен, его всегда можно изменить на обратный).

Задача нелинейного программирования состоит в выборе таких неотрицательных значений переменных, подчиненных системе ограничений в форме неравенств, при которых достигается максимум (или минимум) данной функции. При этом не оговариваются формы ни целевой функции, ни неравенств. Могут быть разные случаи: целевая функция нелинейна, а ограничения линейны; целевая функция линейна, а ограничения (хотя бы одно из них) нелинейны; и целевая функция, и ограничения нелинейны.

Задачи, в которых число переменных и (или) число ограничений бесконечно, называются задачами бесконечномерного нелинейного программирования. Задачи, в которых целевая функция и (или) функции ограничений содержат случайные элементы, называются задачами стохастического нелинейного программирования.

Нелинейные задачи сложны, часто их упрощают тем, что приводят к линейным. Для этого условно принимают, что на том или ином участке целевая функция возрастает или убывает пропорционально изменению независимых переменных.

Такой подход называется методом кусочно-линейных приближений, он применим, однако, лишь к некоторым видам нелинейных задач. Нелинейные задачи в определенных условиях решаются с помощью функции Лагранжа, найдя ее седловую точку, тем самым находят и решение задачи.

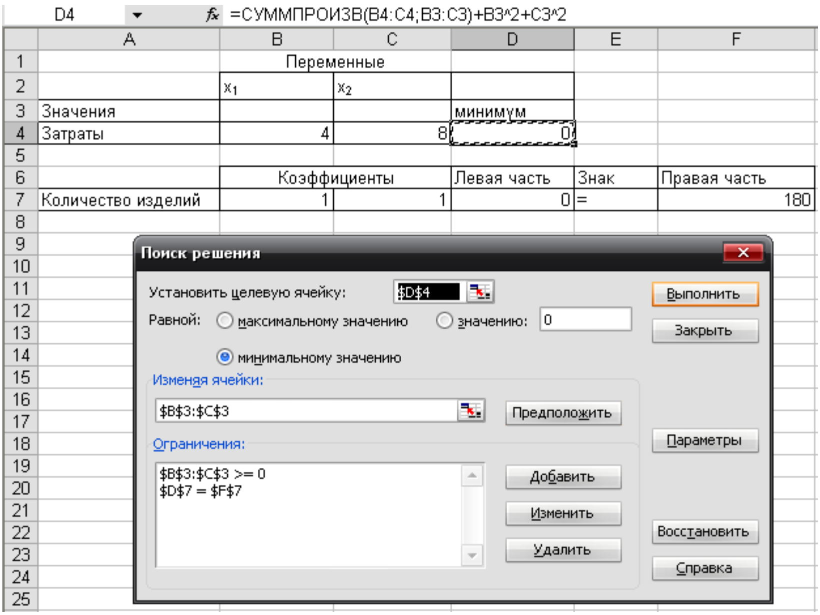
Среди вычислительных алгоритмов нелинейного программирования большое место занимают градиентные методы. Универсального же метода для нелинейных задач нет и, по-видимому, может не быть, поскольку они чрезвычайно разнообразны. Особенно трудно решаются многоэкстремальные задачи. Для некоторых типов задач выпуклого программирования (вид нелинейного) разработаны эффективные численные методы оптимизации.

§ 2. Решение задач нелинейного программирования

Задача. По плану предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий первым способом затраты равны $4x_1 + x_1^2$ руб., а при изготовлении x_2 изделий вторым способом они составляют $8x2 + x_2^2$ руб. Определить, сколько изделий каждым способом следует изготовить, так, чтобы общие затраты на производство продукции были минимальными.

Решение. Математическая постановка задачи состоит в определении минимального значения функции $Z = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2$ при условиях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 180 \\ x_1,\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$



В результате решения получим: x_1=91; x_2=89.

Это означает, что если предприятие изготовит 91 изделие первым технологическим способом и 89 изделий вторым способом, то общие затраты будут минимальными и составят 17 278 руб.

7. ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И МОДЕЛИРОВАНИЯ СИСТЕМ

§ 1. Основные понятия теории вероятностей

Опыт *(эксперимент, испытание)* – ситуация с более чем одним возможным исходом, из которых всегда имеет место точно одно так называемое ***элементарное событие***. Исходом опыта может быть результат наблюдения или измерения.

Единичный, отдельный исход эксперимента называется элементарным событием. Набор всех элементарных событий – пространство событий (множество).

Полному набору событий соответствует полное множество X, относящееся к заданному эксперименту. Полный набор событий – набор всех возможных исходов эксперимента. Элементарному событию соответствует только одна точка пространства событий. Аналогом элементарного события является элемент множества.

Следует заметить, что теория вероятностей изучает не любые события, а случайные.

Случайным событием называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого эксперимента.

Событие – это любое подмножество пространства событий. Это набор элементарных исходов.

Достоверное событие – это событие, которое обязательно произойдет в результате испытания.

Невозможное событие – это событие, которое не может произойти в результате данного опыта (испытания).

Достоверные и невозможные события не являются случайными.

Совместные события. Несколько событий называют совместными, если в результате эксперимента наступление одного из них не исключает появления других.

Несовместные события. Несколько событий называют несовместными в данном опыте, если появление одного из них исключает появления других.

События называют ***единственно возможными***, если в результате испытания хотя бы одно из них обязательно произойдет.

Несколько событий называют ***равновозможными***, если в результате испытания ни одно из них не имеет объективно большую возможность появления, чем другие.

Два единственно возможных и несовместных события называются ***противоположными*** (купля и продажа определенного вида товара есть события противоположные).

Полная группа событий – совокупность всех единственно возможных и несовместных событий.

Классическое определение вероятности

Вероятность появления события А называют отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению этого события, к общему числу всех единственно возможных и несовместных элементарных исходов.

Обозначим число благоприятствующих событию A исходов через m, а число всех исходов – n, тогда

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

где m – целое неотрицательное число;

$0\le m\le n$.

§ 2. Числовые характеристики случайных величин

При решении многих практических задач часто достаточно указать отдельные числовые характеристики, определяющие особенности того или иного распределения случайной величины. Это, прежде всего, ***среднее значение***, которое принадлежит к характеристикам положения случайной величины, то есть представляет такую величину, относительно которой каким-то образом группируются, рассеиваются всевозможные значения случайной величины.

Среднее значение, или математическое ожидание дискретной случайной величины, вычисляется по формуле

$$M[X] = m_x = a = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

где x_i – возможные значения случайной величины X;

p_i – вероятность появления i-го возможного значения случайной величины X.

Математическое ожидание является теоретической характеристикой случайной величины.

Эмпирической характеристикой случайной величины является эмпирическая средняя, вычисляемая по формуле

$$\overline{X} = M^*[X] = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_n m_n}{N} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{m_i}{N}$$

где $\dfrac{m_i}{N}$ – частота значений x_i при N наблюдениях (испытаниях);

$$N = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

m_i – количество появлений значений x_i при N наблюдениях.

Эмпирическая средняя случайной величины по мере увеличения испытаний (наблюдений) приобретает тенденцию стабилизироваться относительно постоянной величины – математического ожидания.

Для непрерывной случайной величины X математическое ожидание определяется интегралом

$$M[X] = a = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Кроме математического ожидания на практике иногда применяются и другие характеристики положения, в частности медиана и мода случайной величины.

Медианой Me случайной величины называется такая величина, относительно которой равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины:

$$P(X > Me) = P(X < Me)$$

Медиану применяют в качестве характеристики ряда распределения в тех случаях, когда имеются очень большие колебания случайной величины.

Модой Mo дискретной случайной величины называется ее значение, обладающее наибольшей вероятностью. Для непрерывной случайной величины мода есть такое значение, которое отвечает максимальной плотности распределения.

В общем случае математическое ожидание, медиана и мода не совпадают. В частном случае при симметричном распределении все три характеристики положения случайной величины совпадают.

Для оценки степени разброса, рассеивания значений случайной величины относительно среднего, вычисляют следующие характеристики:

- дисперсию;
- среднее квадратическое отклонение;
- коэффициент вариации.

Дисперсией называется математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины от своего математического ожидания:

$$D_x = \sigma_x^2 = M[(X - m_x)^2]$$

Чем больше дисперсия, тем в среднем больше отклонение значений случайной величины относительно математического ожидания, то есть будет больше рассеивание случайной величины.

Наряду с дисперсией случайной величины, в качестве характеристики рассеивания случайной величины используется ***среднее квадратическое отклонение***, которое равно положительному значению корня квадратного из дисперсии.

Среднее квадаратическое отклонение имеет одинаковую размерность со случайной величиной, в этом состоит ее преимущество относительно дисперсии.

Эмпирические значения характеристик рассеивания вычисляют по формулам:

- дисперсия

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \frac{m_i}{N}$$

- среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_x \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \frac{m_i}{N}}$$

Для малых выборок, если число испытаний (наблюдений) не превышает $N \le 30$, то характеристики рассеивания вычисляются по формулам:

- дисперсия

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \frac{m_i}{N-1}$$

- среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_x \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \frac{m_i}{N-1}}$$

Относительной характеристикой рассеивания является ***коэффициент вариации***, вычисляемый как отношение среднего квадратического отклонения и эмпирической средней:

$$V = \frac{\sigma_x}{\overline{x}} 100\% \text{ или } V = \frac{\sigma_x}{\overline{x}}$$

Коэффициент вариации может использоваться для сравнения меры рассеивания (колеблемости) случайных величин, имеющих различную размерность.

Нормальный закон распределения случайной величины

Случайной величиной называют величину значения исследуемого признака, измеренную по результатам исхода испытаний, которая может принять то или иное значение, заранее неизвестное.

Под случайной величиной принято понимать числовую функцию, определенную на множестве исходов испытаний. Если все возможные исходы испытаний представляют собой множество $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то любая числовая функция F(X) является также случайной величиной. Совокупность значений $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, которые может принимать случайная величина X, и вероятностей, с которыми она их принимает, называют ***распределением случайной величины X***.

Распределение случайной величины определяется законом распределения.

Под ***законом распределения*** понимают всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон может быть задан в виде таблиц, графиков или аналитических выражений. Например, заданный в виде таблицы закон распределения имеет вид так называемого ***ряда распределения***:

Значение случайной величины, x_i	x_1	x_2	…	x_n
Вероятность появления x_i в испытаниях, $P(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	…	$P(x_n)$

Законов распределения предложено достаточно много. На практике наибольшее распространение получил ***нормальный закон распределения***. Как и все законы распределения, нормальный закон имеет две формы представления:

- ✓ плотность распределения $f(x)$;
- ✓ функцию распределения $F(x)$.

Эти формы вычисляются по следующим зависимостям:

- ✓ плотность распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

где $m = M[x]$ – математическое ожидание случайной величины;

$\sigma = \sigma[x\}$ – среднеквадратическое отклонение;

- ✓ функция распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

которая иногда называется интегральной функцией, имеет большое практическое значение, т.к. с помощью зависимости P(x ≤ a) = F(x) дает возможность определить вероятность появления случайной величины x ≤ a. График плотности распределения показывает, какие значения случайной величины наиболее вероятны. Теоретически случайная величина x может изменяться в пределах $-\infty < x < \infty$. Однако с точностью до долей процента случайная величина находится в интервале

$$M[x] - 3\sigma[x] \le x \le M[x] + 3\sigma[x]$$

что и принимается за пределы изменения случайной величины.

В Excel эти обе формы находятся с помощью функции

НОРМРАСП (а; срзнач; стандоткл; интегральная),

где а – задаваемое значение случайной величины, для которой находятся значения f(a) или F(a),

срзнач; стандоткл – величины, среднее значение и стандартное отклонение по выборке,

интегральная – определяет форму, для которой определяется значение.

При интегральная – ИСТИНА определяется значение интегральной функции, т.е. *функции распределения* F(a). При интегральная – ЛОЖЬ определяется значение *плотности распределения* f(a).

Определение плотности и функции распределения для нормального закона

1. Вычислить количественные характеристики случайной величины. В Excel математическое ожидание M[x] определяется с помощью функции СРЗНАЧ (значения чисел) в категории

Статистические, среднее квадратическое отклонение, обозначаемое σ[x] – СТАНДОТКЛОН (значения чисел) и третьей важной количественной характеристикой случайной величины, является *коэффициент вариабильности,* который показывает относительную величину разброса случайных величин. Формулы для вычисления количественных характеристик случайной величины в Excel представлены на рис. 7.1.

2. Найти пределы изменения случайной величины x:

   x_{min} = M[x] – 3 σ[x] = 110 – 3·23.9 ≈ 38

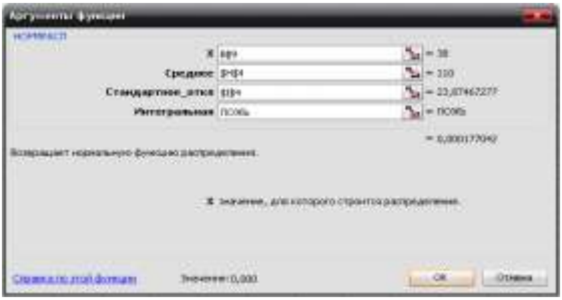
   x_{max} = M[x] – 3 σ[x] = 110 + 3·23.9 ≈ 182

3. Для получения плавных кривых f(x) и F(x) в интервале изменения случайной величины между x_{min} и x_{max} целесообразно принять примерно 20 промежуточных значений.

Рис. 7.1. *Определение плотности и функции распределения*

4. Принятые значения для которых будут определяться f(x) и F(x), ввести в ячейки B9:W9.
5. Установить курсор в ячейку B10 и ввести формулу:

– открыть Мастер функций;
– категория Статистические – функция НОРМРАСП;
– на экране диалоговое окно Аргументы функции, заполнить текстовые поля:



6. Скопировать формулу из ячейки B10 в ячейку B11, открыть Мастер функций и в строке ввода в диалоговом окне изменить ЛОЖЬ на ИСТИНА и щелкнуть по кнопке Ok. Формула в ячейке B11 будет иметь вид =НОРМРАСП(B$9;$H$4;$I$4;ИСТИНА)
7. Выделить ячейки B10:B11 и скопировать формулы до ячеек W10:W11.

Построение графиков плотности и функции распределения для нормального закона

1. Выделить диапазон ячеек A10:W11 и открыть Мастер диаграмм.
2. Выбрать вкладку Нестандартные – Графики (2оси), щелкнуть по кнопке Далее.
3. На втором шаге во вкладке Ряд подписать ось X.
4. На третьем шаге Мастера диаграмм ввести название диаграммы и осей.
5. Поместить диаграмму на листе: имеющемся.

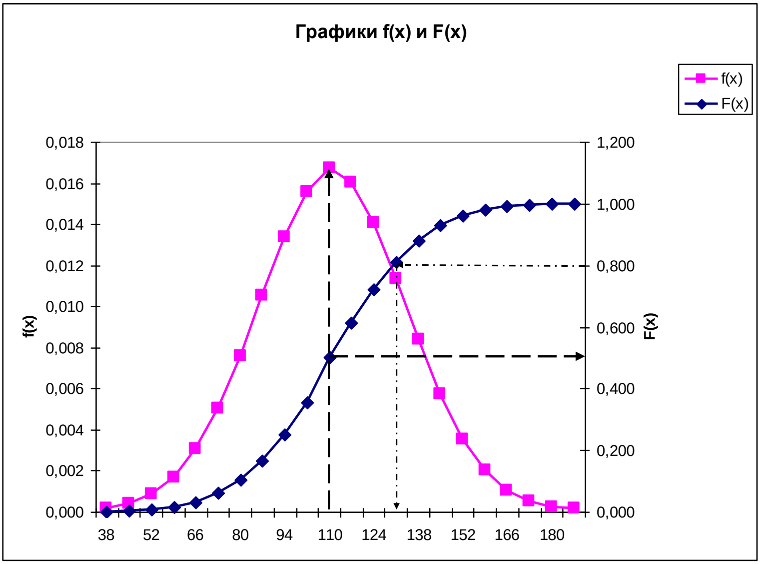


График плотности распределения f(x) показывает вероятность появления каждого значения случайной величины. Из построенного графика видно, что наиболее вероятно появление случайной величины для M[x] = 110, что совершенно закономерно, т.к. наиболее вероятным значением случайной величины является ее математическое ожидание.

Для определения вероятности появления случайной величины в некотором интервале используется график функции распределения. С его помощью можно решать две задачи: прямую и обратную. Решение прямой задачи дает ответ на вопрос: какова вероятность того, что случайная величина x будет не менее a.

Из построенного графика видно, что $P(x \leq 110) = 0{,}5$.

Обратная задача ставится так: чему должна быть равна случайная величина x, чтобы вероятность ее появления равнялась бы заданному значению a. Из графика видно, что вероятность $a = 0{,}8$ будет справедлива для случайной величины $x \leq 130$, т.е. $P(x \leq 130) = 0{,}8$.

§ 3. Методы и модели корреляционно-регрессионного анализа

Большинство явлений и процессов находятся в постоянной взаимной и объективной всеохватывающей связи. Исследование зависимостей и взаимосвязей между объективно существующими явлениями и процессами играет большую роль в экономике. Оно дает возможность глубже понять сложный механизм причинно-следственных отношений между явлениями. Для исследования интенсивности, вида и формы зависимостей широко применяется ***корреляционно-регрессионный анализ***, который является методическим инструментарием при решении задач прогнозирования, планирования и анализа хозяйственной деятельности предприятий.

Различают два вида зависимостей между экономическими явлениями и процессами:

- функциональную;
- стохастическую (вероятностную, статистическую).

В случае *функциональной* зависимости имеется однозначное отображение множества А на множество В. Множество А называют областью определения функции, а множество В – множеством значений функции.

Функциональная зависимость встречается редко.

Статистической называется зависимость между случайными величинами, при которой изменение одной из величин влечет за собой изменение закона распределения другой величины.

В частном случае статистическая зависимость проявляется в том, что при изменении одной из величин изменяется математическое ожидание другой. В таком случае говорят о *корреляции* или корреляционной зависимости.

Односторонняя вероятностная зависимость между случайными величинами есть *регрессия*. Она устанавливает соответствие между этими величинами.

Односторонняя стохастическая зависимость выражается с помощью функции, которая называется ***регрессией***.

Виды регрессии:

1. Регрессия относительно числа переменных.

   Простая регрессия – регрессия между зависимой переменной y и одним фактором – x.

   Множественная регрессия – это регрессия между зависимой переменной y и несколькими объясняющими переменными x_1, x_2, …, x_n.
2. Регрессия относительно формы зависимости:
   – линейная регрессия, выражаемая линейной функцией;
   – нелинейная регрессия, выражаемая нелинейной функцией.
3. В зависимости от характера регрессии различают следующие ее виды:
   – положительную регрессию. Она имеет место, если с увеличением (уменьшением) объясняющей переменной значение зависимой переменной также соответственно увеличивается (уменьшается);
   – отрицательную регрессию. В этом случае с увеличением или уменьшением объясняющей переменной зависимая переменная уменьшается или увеличивается.
4. Относительно типа соединения явлений различают:
   – непосредственную регрессию. В этом случае зависимая и объясняющая переменные связаны непосредственно друг с другом;
   – косвенную регрессию. В этом случае объясняющая переменная действует на зависимую через ряд других переменных;
   – ложную регрессию. Она возникает при формальном подходе к исследуемым явлениям

без уяснения того, какие причины обуславливают данную связь.

Регрессия тесно связана с корреляцией.

Корреляция означает связь, соотношение между объективно существующими явлениями. Связи между явлениями могут быть различными по силе.

В корреляционном анализе оценивается сила связи, а в регрессионном анализе исследуется ее форма.

Корреляция, как и регрессия, имеет различные виды:

1. Относительно характера корреляции различают:
   - положительную;
   - отрицательную.
2. Относительно числа переменных:
   - простую;
   - множественную;
   - частную.
3. Относительно формы связи:
   - линейную;
   - нелинейную.
4. Относительно типа соединения:
   - непосредственную;
   - косвенную;
   - ложную.

Корреляционная зависимость между факторами считается:

слабая, если $r < 0{,}3$

средняя, если $0{,}3 \leq r \leq 0{,}7$

сильная, если $r > 0{,}7$

или

Величина коэффициента корреляции	Характер связи
до ±0,3	отсутствует
±0,3 – ±0,5	слабая

±0,5 – ±0,7	средняя
±0,7 – ±0,9	сильная
±0,9 – ±1,0	полная функциональная

Квадрат коэффициента корреляции называют **коэффициентом детерминации**. Он показывает, какая доля общей вариации результативного признака определяется изучаемым фактором.

Любое причинное влияние может выражаться либо функциональной, либо корреляционной связью. Но не каждая функция или корреляция соответствует причинной зависимости между явлениями. Поэтому требуется обязательное исследование причинно-следственных связей.

Исследование корреляционных связей называется ***корреляционным анализом***, а исследование односторонних стохастических зависимостей – ***регрессионным анализом***.

Корреляционный и регрессионный анализ имеет свои задачи.

Задачи корреляционного анализа:

1. Измерение степени тесноты (силы), формы и направления взаимосвязи между двумя и более факторами (явлениями).
2. Отбор факторов, оказывающих наиболее существенное влияние на результативный признак, на основании измерения тесноты связи между явлениями.
3. Обнаружение неизвестных причинных связей. Корреляция непосредственно не выявляет причинных связей между явлениями, но устанавливает степень необходимости этих связей и достоверность суждений об их наличии. Причинный характер связей выясняется с помощью логически-профессиональных рассуждений, раскрывающих механизм связей.

Задачи регрессионного анализа:

1. Установление формы зависимости (линейная или нелинейная; положительная или отрицательная и т.д.).
2. Определение функции регрессии и установление влияния факторов на зависимую переменную. Важно не только определить форму регрессии, указать общую тенденцию изменения зависимой переменной, но и выяснить, каково было бы действие на зависимую переменную главных факторов, если бы прочие не изменялись и если бы были исключены случайные элементы. Для этого делают функцию регрессии в виде математического уравнения того или иного типа.
3. Оценка неизвестных значений зависимой переменной, то есть решение задач экстраполяции и интерполяции. В ходе экстраполяции распространяются тенденции, установленные в прошлом, на будущий период. Экстраполяция широко используется в прогнозировании. В ходе интерполяции определяют недостающие значения, соответствующие моментам времени между известными моментами, то есть определяют значения зависимой переменной внутри интервала заданных значений факторов.

Корреляционные связи выражают определенными математическими уравнениями. Функция, отображающая статистическую связь между различными величинами, называется ***уравнением регрессии***.

В этом случае функция представляет собой математическую модель многофакторного процесса, которая устанавливает связь между изучаемыми явлениями, что позволяет определить ожидаемое значение результата производства в зависимости от действующих на него факторов.

Уравнение линейной множественной регрессии выражает связь между факторами и результативным признаком и имеет следующий вид:

$$Y = a+b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n$$

Y – зависимая переменная (результативный признак);
x_1, x_2 , … x_n – независимые переменные (факторы);
a – свободный член уравнения регрессии;
b_1, b_2, …, b_n – коэффициенты регрессии;
n – число факторов, включаемых в модель.

Коэффициент регрессии показывает, на какую величину в среднем изменится Y при каждом изменении *x* на единицу, при постоянном значении остальных переменных.

Коэффициенты регрессии имеют знак коэффициента корреляции.

Чем ближе значение коэффициента корреляции к 1, тем сильнее связь между признаками, тем лучше уравнение регрессии описывает взаимосвязь между признаками.

Так как надежность результатов анализа в значительной степени зависит от количества сопоставляемых данных, необходимо измерять существенность полученного уравнения регрессии и коэффициента корреляции, которая может быть оценена с помощью методов дисперсионного анализа согласно F-критерию Фишера.

Полученное значение F-критерия сравнивают с табличным.

Для факторной дисперсии число степеней свободы вариации составляет $\nu_{y_x} = k-1$, для остаточной $\nu_\varepsilon = n-k$ (k – число параметров в уравнении регрессии, n – численность выборочной совокупности).

Если фактическое значение F-критерия больше табличного, связь между признаками достоверна и уравнение регрессии в полной мере отражает ее. В противном случае считается, что связь между признаками носит случайный характер.

Для оценки значимости коэффициента корреляции и уравнения регрессии используют также t-критерий Стьюдента. Фактическое значение t-критерия сравнивают с табличным с учетом числа степеней свободы вариации $\nu = n - k$. Если фактическое значение t-критерия больше табличного, связь достоверна, если меньше – несущественна.

§ 4. Многомерный анализ

Факторный анализ

При анализе экономических явлений и процессов часто приходится сталкиваться с многомерностью их описания, то есть с необходимостью учитывать большое число признаков. При многообразии признаков не всегда представляется возможным сразу выделить наиболее существенные, главные из них. Поэтому естественной попыткой является возможность сконцентрировать информацию, выразить большое число исходных косвенных признаков одним или несколькими наиболее емкими, информационными признаками. Назовем их основным признаками.

Основные признаки конструируются по определенным алгоритмам на основе исходных, единичных признаков. Основные признаки должны быть наиболее существенными, определяющими. Именно для такого интегрирования информации и используется факторный анализ. Сущность его заключается в описании и затем в переходе от описания объекта большим набором единичных, непосредственно измеряемых признаков к описанию их меньшим числом сконструированных интегральных переменных, отражающих наиболее существенные черты исследуемого объекта.

Факторы – основные признаки, являющиеся некоторыми функциями единичных исходных признаков.

Общая схема дисперсионного анализа

В экономике часто встречаются объекты исследования, состояние которых определяется факторами, не имеющими количественной оценки. Такими факторами могут быть неуправляемые и управляемые переменные, которые по каким-либо причинам не позволяют производить их измерение в данном эксперименте, а также те неконтролируемые переменные, уровни варьирования которых можно произвольно выбирать и фиксировать во времени.

Исследование факторов по их дисперсиям называют **дисперсионным анализом**. Дисперсионный анализ был предложен Р. Фишером и развит А. Йейтсом.

Основная идея **дисперсионного анализа** заключается в разложении оценки общего рассеяния функции **У** на составляющие, зависящие от:

- ✓ случайных причин;
- ✓ каждого из рассматриваемых факторов;
- ✓ взаимодействия факторов;
- ✓ оценивания статистической значимости дисперсий факторов с учетом ошибки воспроизводимости опыта.

Дисперсионный анализ применяют для обработки данных многофакторных агрономических и зоотехнических опытов, когда определяется влияние одного или нескольких факторов на изменение какого-либо признака. Дисперсионный анализ основан на применении F-критерия Фишера и НСР (наименьшая существенная разность) для оценки различий между источниками вариации.

Для проверки гипотезы о равенстве дисперсий фактическое значение F сравнивают с теоретическим (табличным) при определенном уровне значимости (вероятности суждения).

Гипотеза о равенстве дисперсий при заданном уровне значимости принимается, если $F_{факт} \le F_{табл}$, в этом случае считается, что общая вариация определяется случайными причинами и не зависит от действия группировочного фактора, то есть различия между средними несущественны. Если же $F_{факт} > F_{табл}$ данная гипотеза отвергается и различия между дисперсиями считаются статистически значимыми.

Кроме общей оценки различий между средними, дисперсионный анализ позволяет дать оценку различий между парами средних.

Наименьшая существенная разность (НСР) – величина, указывающая границу возможных случайных отклонений в эксперименте, которая в данном опыте признается существенной при 5%-ном ($НСР_{05}$) или 1%-ном ($НСР_{01}$) уровне значимости.

Кластерный анализ

Кластерный анализ представляет собой метод деления статистической совокупности на части (группы, классы, кластеры) одновременно по всем наиболее существенным признакам.

Кластерный анализ позволяет вначале по определенным количественным критериям выделить группы по комплексу признаков, а затем теоретически обосновать качественное своеобразие выделенных частей совокупности.

Наиболее существенным с методологической точки зрения при кластерном анализе является следующее:

а) образование единой меры, охватывающей все признаки;
б) чисто количественное определение границ групп.

Эти подходы находят отражение в следующем алгоритме классификации:

1. Пусть имеется 1, 2, …, j, …, m объектов каждый из которых характеризуется 1, 2, …, i, …, k признаками. Тогда значение i-го признака по j-му объекту можно записать как X_{ij}. Ставится задача провести классификацию единиц одновременно по всем k признакам.
2. Поскольку каждый из признаков имеет свою размерность и единицу измерения, признаки следует привести в сопоставимый вид, что может быть сделано через нормированное отклонение t_{ij}. С этой целью следует:
   - найти x_i – среднее значение по каждому из k признаков;
   - найти σ_i – среднее квадратическое отклонение по каждому из k признаков;
   - пронормировать x_{ij} как $t_{ij} = \dfrac{x_{ij} - \overline{x_i}}{\sigma_i}$.

   Осуществив переход от x_{ij} к t_{ij}, получим единицы свободные от содержания, имеющие с высокой степенью надежности границы в пределах $\pm 3\sigma$. С нормированными отклонениями можно проводить любые алгебраические операции, чего нельзя было делать с x_{ij}.
3. Выбирается функция состояния между объектами (единицами наблюдения). В качестве таковой может выступать евклидово расстояние

$$\Phi_{ik} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (t_{ij} - t_{ik})^2}$$

4. Если число классов (кластеров) известно заранее, то устанавливаются типичные их предста-

вители, то есть определяются значения признаков по типичным представителям.

Если число кластеров заранее не задано и неизвестны их типичные представители, то их число принимаем условно равным С. Каждый из объектов следует отнести к тому из С-классов, с которым он имеет минимальную (по сравнению с другими классами) величину функции близости (расстояния).

Так как во втором случае число С неизвестно, оно подбирается методом перебора.

8. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ХОЗЯЙСТВЕННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Понятие производственных функций

Движение и изменение различных процессов всегда причинно обусловлено. Через влияние причинных отношений познается связь между явлениями.

Связи, которые выявляются при большом числе наблюдений и проявляются в том, что изменение значения одного фактора приводит к изменению среднего значения другого, называют *статистическими,* или *корреляционными связями.*

Большинство процессов и явлений связаны между собой корреляционными зависимостями, которые обычно выражают в виде определенной функции. Функция, отображающая статистическую связь между различными величинами, называется *уравнением регрессии.*

В этом случае функция представляет собой математическую модель многофакторного процесса (или отдельных его сторон), которая устанавливает связь между изучаемыми явлениями, что позволяет определить ожидаемое значение результата производства в зависимости от действующих на него факторов.

Математическое выражение экономических и технологических зависимостей изучаемого объекта называется ***производственной функцией***.

Производственные функции выражают взаимосвязь факторов с результатами производства. Их задачей является исследование количественной меры влияния производственных факторов на конечные результаты, то есть выяснение количественных характеристик связи между затратами производственных ресурсов и выпуском продукции.

Производственные функции могут быть выражены в виде *таблиц, графиков* и *аналитических уравнений.* Наиболее распространенный способ выражения производственных функций – аналитический, т. е. в виде алгебраических формул.

В отличие от экономико-математических моделей, модель производственной функции описывают одним уравнением, в котором результат производства представляют как функцию n независимых величин-факторов.

В общем случае конечный результативный показатель обозначается у, а факторы производства – $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и исследуется функция $\mathbf{y=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$.

Для математического выражения производственной функции в каждом конкретном случае находят вид алгебраического уравнения, который соответствовал бы исследуемым взаимозависимостям.

В связи с тем, что производственные функции представляют корреляционные зависимости, изучение количественного влияния различных факторов на результаты производства проводится на основе методов математической статистики и, в частности, методов корреляционно-регрессионного анализа.

Корреляционный анализ количественно оценивает связь между двумя или несколькими взаимодействующими явлениями. Его применение позволяет определить наличие и тесноту связи между явлениями. Регрессионный анализ дает возможность установить, как в среднем изменяется результативный признак под влиянием одного или нескольких факторов.

С помощью производственных функций исследуются такие важные экономические показатели, как эффективность использования трудовых ресурсов, производственных фондов, вопросы влияния научно-технического прогресса на конечные результаты производства, темпы и пропорции экономического развития и др.

§ 2. Виды производственных функций

Вид производственной функции определяется видом алгебраического уравнения, с помощью которого описывается ее математическая модель.

Наиболее простой функциональной зависимостью является линейная, графически изображаемая прямой линией. Ее общий вид:

$$y=a+bx$$

где y – зависимая переменная (результат производства);
x – независимая переменная (фактор производства);
a и b – параметры уравнения.

Параметр **a** характеризует начало отсчета расчетных значений **y** при определении производственной функции. Параметр **b** называется коэффициентом регрессии. Он показывает, на сколько возрастает величина **y** при изменении фактора **x** на единицу. Такой вид функции применяют в том случае, когда с возрастанием производственного фактора **x** результат производства **y** изменяется пропорционально.

Чаще экономические зависимости описываются уравнениями кривых: в виде *квадратичной функции параболического типа* для выражения зависимости между факторами производства и результатами, когда увеличение фактора идет равномерно, а результат производства резко возрастает или убывает:

$$y=a+b_1x+b_2x^2$$

уравнения гиперболы – для выражения обратно пропорциональной зависимости:

$$y = a + \frac{b}{x}$$

Здесь предполагается, что часть расходов (a) растет пропорционально выходу продукции, а остальная часть их (b) остается постоянной.

Для выражения экономических взаимосвязей используется *степенная функция* вида:

$$y=ax^b$$

где b – коэффициент регрессии. Он показывает, на сколько процентов изменится результат производства **y** при изменении одного из его факторов на один процент при неизменном значении остальных факторов.

Зависимость результата производства от двух и более факторов называется множественной регрессией, а уравнение, выражающее их связь – уравнением множественной регрессии. Многофакторное линейное уравнение регрессии имеет вид:

$$y=a+b_1x_1+b_2x_2+\ldots+b_nx_n$$

где y – результат производства;

x_1 x_2,..., x_n – факторы производства;

b_1, b_2, …, b_n – коэффициенты регрессии.

Коэффициенты регрессии показывают, на сколько в среднем увеличился бы результат, производства **y** при изменении соответствующего фактора производства **x** на одну единицу, если бы влияние других факторов, включенных в данную модель, оставалось бы неизменным.

Для математического выражения экономических взаимосвязей используются и некоторые другие производственные функции.

Чтобы правильно подобрать вид алгебраического уравнения, необходимо в каждом конкретном случае проводить тщательный качественный анализ моделируемого процесса с целью выявления характера его взаимосвязей. При этом на основе логического анализа выбираются результативный показатель и факторы производства, определяющие этот показатель.

Среди множества факторов, влияющих на производство выбирают главные, которые существенно влияют на результаты производства и могут быть измерены количественно Влияние же второстепенных факторов в процессе определения производственных функций усредняется.

В качестве информации для определения производственных функции могут быть результаты проводимых опытов, специальных наблюдений или статистические данные о производственной деятельности на предприятии.

§ 3. Расчет параметров производственных функций

Решение производственной функции состоит в отыскании ее параметров: a, b_1, b_2, …, b_n.

Рассмотрим пример линейной зависимости валовой продукции (y) от двух производственных факторов: стоимости производственных основных фондов (x_1) и затрат труда (x_2):

$$y=a+b_1x_1+b_2x_2$$

Значения y, x_1, x_2 определяют по отчетным данным совокупности предприятий, а искомыми характеристиками являются a, b_1, b_2, которые рассчитывают методом наименьших квадратов используя Excel (Сервис – Анализ данных – Регрессия).

Таблица 8.1. *Исходные данные для определения производственной функции*

Номер хозяйства	Производственные основные фонды, млн. руб.	Затраты труда, млн. чел.-ч.	Валовая продукция, млн. руб.
	x_1	x_2	y
1	9,5	0,75	5,6
2	6,4	0,63	3,7
3	7,5	0,60	4,0
4	8,0	0,71	4,7
5	9,1	0,65	5,1
6	6,5	0,50	3,2
7	9,0	0,70	5,3
8	7,1	0,62	4,1

9	5,9	0,47	3,0
10	6,3	0,58	3,9
В среднем	7,53	0,621	

В результате выполнения регрессионного анализа получены следующие значения параметров:

$$a = -1{,}4036,\ b_1 = 0{,}4226,\ b_2 = 3{,}9961$$

Следовательно, производственная функция имеет вид:

$$У = -1{,}4036 + 0{,}4226x_1 + 3{,}9961x_2$$

Наиболее важной характеристикой производственной функции является показатель средней производительности (или эффективности) ресурсных факторов x_1 и x_2.

Средняя производительность первого ресурса (основных фондов – x_1), равная коэффициенту при x_1, показывает, на сколько единиц увеличится валовая продукция в среднем при увеличении основных фондов на единицу, т.е. прирост основных фондов на 1 млн. руб. сопровождается приростом продукции в среднем на 0,4226 млн. руб.

Средняя производительность второго ресурса (затрат труда) показывает, что увеличение затрат труда на 1 млн. чел.-ч. обеспечивает прирост продукции в среднем на 3,9961 млн. руб.

В экономическом анализе важным является сопоставление темпов прироста ресурсов с темпами прироста продукции, то есть того, на сколько процентов увеличится выпуск продукции при увеличении данного ресурса на 1%. Такие показатели получили название *коэффициентов эластичности.*

Коэффициент эластичности выпуска продукции по фондам (x_1) рассчитывается по формуле:

$$E_1 = \frac{b_1 \bar{x}_1}{a + b_1 \bar{x}_1 + b_2 x_2} = \frac{0{,}4226 \cdot 7{,}53}{-1{,}4036 + 0{,}4226 \cdot 7{,}53 + 3{,}9961 \cdot 0{,}621} = \frac{3{,}182178}{4{,}2601561} \approx 0{,}75\%$$

Таким образом, на 1% прироста x_1приходится 0,75% прироста продукции.

В формуле значения x_1 и x_2 взяты на среднем уровне. В общем случае коэффициент эластичности изменяется с изменением уровня самого фактора.

Коэффициент эластичности выпуска продукции по второму фактору (x_2) определяется аналогично:

$$E_2 = \frac{b_2 \bar{x}_2}{a + b_1 \bar{x}_1 + b_2 x_2} = \frac{3{,}9961 \cdot 0{,}621}{-1{,}4036 + 0{,}4226 \cdot 7{,}53 + 3{,}9961 \cdot 0{,}621} = \frac{2{,}4815781}{4{,}2601561} \approx 0{,}58\%$$

На 1% прироста затрат труда прирост продукции составит 0,58%.

Важно заметить, что если выход продукции увеличивается более быстрыми темпами, чем прирост фактора, то коэффициент эластичности больше единицы; если же прирост продукции отстает от темпов прироста фактора, то $E<1{,}0$. При одновременном рассмотрении нескольких факторов коэффициенты эластичности можно сложить и получить суммарную эластичность производства $\sum E_i$. Если $\sum E_i > l{,}0$, то выход продукции возрастает более высокими темпами, чем прирост факторов. В нашем примере $E_1+E_2 = 0{,}75+0{,}58=1{,}33>1{,}0$.

Различным образом комбинируя факторы-ресурсы, можно обеспечить одинаковый уровень производства. Из этого следует, что в определенных пределах можно говорить о возможности замещения одного ресурса другим (недостаток трудовых ресурсов покрывать большей оснащенностью фондами и т. д.).

Сопоставляя показатели средней производительности различных ресурсов, можно оценить их относительную важность с точки зрения обеспечения выхода продукции и определить средние нормы замещения одного ресурса другим.

Из нашего примера следует, что прирост единицы фондов обеспечивает 0,4226 единицы выпуска продукции, а прирост единицы труда — 3,9961 единицы. Поэтому для высвобождения 1ч труда необходимо 9,46 руб. фондов (3,9961:0,4226). Если предположить, что в среднем один работник за год отрабатывает 1800 человеко-часов, то фондовый аналог работника составит 1800·9,46=17028 руб. Эту оценку можно использовать при определении общего ресурсного потенциала хозяйства.

Производственные функции можно использовать как для планирования ряда показателей сельскохозяйственного производства, так и при обосновании входной информации для экономико-математических моделей линейного программирования.

9. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРОГНОЗИРОВАНИИ

§ 1. Цель, типы и способы прогнозирования

Прогноз – научно обоснованное суждение о возможных состояниях объекта в будущем, альтернативных путях и сроках их осуществления.

Цель экономического прогнозирования – предсказание будущих последствий хозяйственных решений, принимаемых в текущий момент времени.

Классифицируют прогнозы по различным признакам.

В соответствии с проблемно-целевым признаком различают *поисковый* и *нормативный* прогнозы.

Поисковый прогноз – это прогноз определения возможных состояний явления в будущем, отвечающий на вопрос: что вероятнее всего произойдет при условии сохранения действующих тенденций? Его метод – **экстраполяция**.

Нормативный прогноз выполняется с целью определения путей и сроков достижения возможных состояний объекта прогнозирования в будущем, принимаемых в качестве цели. Основной метод прогнозирования – **интерполяция**.

По критерию природы объекта выделяют прогнозы:

- ***социальные*** (в том числе демографические);
- ***ресурсные*** (природные, материальные, трудовые, финансовые);
- ***научно-технические*** (перспективы развития науки и техники и влияние этих достижений на экономику);
- ***общественных и личных потребностей*** (спрос, потребление, потребности в образовании, здравоохранении, культуре и т.д.).

По критерию времени выделяют прогнозы:

- ***оперативные*** (до 1 месяца);
- ***краткосрочные*** (от 2 месяцев до 1 года);
- ***среднесрочные*** (от 1 до 5 лет);
- ***долгосрочные*** (от 5 до 15 лет);
- ***дальнесрочные*** (свыше 15 лет).

По критерию сложности различают прогнозы:

- ***сверхпростой;***
- ***простой;***
- ***сложный;***

- ***сверхсложный.***

Эти прогнозы отличаются наличием взаимосвязанных переменных в их описании: в сверхпростом прогнозе отсутствуют взаимосвязи, и сверхсложном – взаимосвязи тесные (с коэффициентом корреляции, близким к 1).

По степени детерминированности объекта прогнозы могут быть:

- ***детерминированными,*** то есть без существенных потерь информации в описании условий;
- ***стохастическими,*** в которых требуется учет случайных величин;
- ***смешанными,*** включающими характеристики двух вышеуказанных прогнозов.

По критерию характера развития объекта во времени различают прогнозы:

- ***дискретные,*** для которых характерен тренд со скачкообразными изменениями в фиксированные периоды времени;
- ***апериодические,*** которые представлены в виде непериодических функций времени;
- ***циклические,*** для которых характерна периодическая функция времени.

По критерию масштабности объекта различают прогнозы:

- ***сублокальные***
- ***локальные***
- ***суперлокальные (субглобальные)***

Для фирм, организаций, предприятий

- ***глобальные***

Для стран или группы стран

Большое значение в прогнозировании имеет выбранный **метод** и **прием**.

Прием прогнозирования – это одна или несколько математических или логических операций, направленных на получение конкретного результата при прогнозировании (в качестве примеров можно назвать сглаживание или выравнивание динамических рядов, расчет средневзвешенного значения величин и т.д.).

Метод прогнозирования – это способ исследования объекта прогнозирования, направленный на разработку прогноза.

Совокупность специальных правил, приемов и методов составляет методику прогнозирования.

К наиболее распространенным методам прогнозирования относятся: экстраполяция, нормативные расчеты, в том числе интерполяция, экспертные оценки, аналогия, математическое моделирование.

Экстраполяция – это метод, при котором прогнозируемые показатели рассчитываются как продолжение динамического ряда на будущее по выявленной закономерности развития. Метод позволяет найти уровень ряда за его пределами в будущем. Экстраполяция эффективна для краткосрочных прогнозов, если данные динамического ряда выражены ярко и устойчиво.

Экстраполяция может быт в виде тренда, корреляционных и регрессионных зависимостей, может быть основана на факторном анализе и др.

Нормативный метод прогнозирования заключается в определении путей и сроков достижения возможных состояний явления, принимаемых в качестве цели. Этот метод чаще применяется для программных или целевых прогнозов. Используются как количественное выражение норматива, так и определенная шкала возможностей, оценочной функции.

Метод экспертных оценок используется преимущественно в долгосрочных прогнозах. В качестве эксперта выступает квалифицированный специалист (группа специалистов) по конкретной проблеме, который может сделать долгосрочный и достоверный вывод об объекте прогнозирования. Этот метод чаще используется в тех случаях, когда трудно количественно оценить прогнозный фон, и специалисты делают это на основе понимания вопроса. По существу, мнение специалиста – это результат мысленного анализа и обобщения процессов, относящихся к прошлому, настоящему и будущему, на основании своего собственного опыта, квалификации и интуиции.

Метод аналогии предполагает перенос знаний об одном предмете (явлении) на другой. Такой перенос верен с определенной долей достоверности (вероятности), так как сходство между явлениями редко бывает полным. Различают *историческую* и *математическую* аналогию. *Историческая аналогия* основана на установлении и использовании аналогии объекта прогнозирования с одинаковыми по природе объектами.

Метод математической аналогии основан на установлении аналогии математических описаний процессов развития различных по природе объектов. Моделирование и эксперимент используют метод аналогии.

Математическое моделирование означает описание экономического (моделируемого) явления посредством математических формул, уравнений и неравенств.

В прогнозировании различают: *макромоделирование*, то есть укрупненное моделирование показателей экономики развития страны в целом; *микромоделирование*, то есть построение моделей для отдельного объекта (предприятия, фирмы); моделирование экономических процессов региона, отрасли.

Возможности ЭММ весьма широки – от анализа до выработки управленческого решения, включая вопросы прогнозирования развития хозяйственных процессов. Моделирование обычно рекомендуется использовать как «консультирующее средство», но окончательное решение должно оставаться за специалистом. Сложное экономическое явление (процесс) требует создания (разработки) сложных математических моделей, а они, в свою очередь, приводят к трудностям в расчетах. При упрощении модели возможно снижение ее достоверности.

§ 2. Прогнозирование методом статистического анализа

Прогнозирование, основанное на использовании методов статистического анализа ретроспективных данных, допустимо в том случае, когда между прошлым и будущим имеется определенная причинно-следственная связь. Можно утверждать, что анализ ретроспективных данных служит надежной основой для принятия решений относительно будущих хозяйственных действий, однако не следует забывать, что прогностические оценки, полученные методом статистического анализа, подлежат корректировке в случае, если известны те или иные факторы, влияние которых с той или иной вероятностью ожидается в будущем.

Наиболее характерной задачей прогнозирования, которая решается на каждом предприятии (фирме, организации) является задача спроса на товары и услуги. Для решения этой задачи необходимо предварительное изучение рынков сбыта маркетинговыми исследованиями, которые и поставляют необходимую статистическую информацию для применения методов статистического анализа при разработке прогнозов.

Алгоритм построения прогноза методом статистического анализа состоит из следующих этапов:

- строится график зависимости, используя Мастер диаграмм Excel;

- на основе визуального изучения графика делается предположение об аналитической форме кривой, которая наилучшим образом способна аппроксимировать ломаную на графике;
- применяется метод наименьших квадратов для построения прогнозирующей кривой;
- оценивается среднее значение погрешности полученных прогнозных оценок;
- принимается решение об использовании или неиспользовании выбранной кривой для построения прогноза.

Для более глубокого анализа тенденций развития применяют аналитическое выравнивание, основанное на поиске так называемого **уравнения развития** (**тренда**).

Наиболее эффективным методом построения прогнозирующей функции считается метод наименьших квадратов. Суть его состоит в подборе уравнения, которое наиболее точно отражало бы тенденцию развития.

Трендовая модель адекватна изучаемому процессу и отражает тенденцию его развития во времени при значении R-квадрат близким к **1**.

Существует шесть различных видов линий тренда (аппроксимация и сглаживание), которые могут быть добавлены на диаграмму Microsoft Excel. Способ следует выбирать в зависимости от типа данных.

Типы линий тренда

Линейная

Линейная аппроксимация – это прямая линия, наилучшим образом описывающая набор данных. Она применяется в самых простых случаях, когда точки данных расположены близко к прямой. Линейная аппроксимация хороша для величины, которая увеличивается или убывает с постоянной скоростью.

Логарифмическая

Логарифмическая аппроксимация полезна для описания величины, которая вначале быстро растет или убывает, а затем постепенно стабилизируется. Логарифмическая аппроксимация использует как отрицательные, так и положительные величины.

Полиномиальная

Полиномиальная аппроксимация используется для описания величин, попеременно возрастающих и убывающих. Она полезна, например, для анализа большого набора данных о нестабильной величине. Степень полинома определяется количеством экстремумов (максимумов и минимумов) кривой. Полином второй степени может описать только один максимум или минимум. Полином третьей степени имеет один или два экстремума. Полином четвертой степени может иметь не более трех экстремумов.

Степенная

Степенная аппроксимация полезна для описания монотонно возрастающей либо монотонно убывающей величины. Использование степенной аппроксимации невозможно, если данные содержат нулевые или отрицательные значения.

Экспоненциальная

Экспоненциальная аппроксимация полезна в том случае, если скорость изменения данных непрерывно возрастает. Однако для данных, которые содержат нулевые или отрицательные значения, этот вид приближения неприменим.

Скользящее среднее

Использование в качестве приближения скользящего среднего позволяет сгладить колебания данных и таким образом более наглядно показать характер зависимости. Такая линия тренда строится по определенному числу точек (оно задается параметром **Шаг**). Элементы данных усредняются, и полученный результат используется в качестве среднего значения для приближения. Так, если **Шаг** равен 2, первая точка сглаживающей кривой определяется как среднее значение первых двух элементов данных, вторая точка - как среднее следующих двух элементов и так далее.

Пример. Пусть известна статистика стоимости валового выпуска продукции Y (тыс. руб.) некоторого предприятия за 9 лет – табл. 9.1.

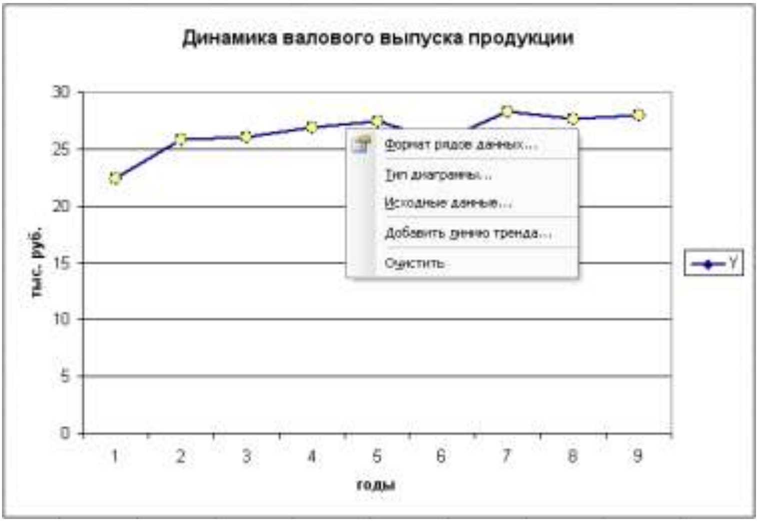
Таблица 9.1. *Исходные данные для построения трендовой модели*

Стоимость ВП, тыс. руб.	Y	22,4	25,8	26,1	26,9	27,4	25,7	28,3	27,6	28,0
Годы	x	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Необходимо провести статистический анализ исходных данных в соответствии с алгоритмом, изложенным выше. Методом наименьших квадратов определить параметры аналитической кривой для линейной и квадратичной аппроксимации исходной ломаной. В соответствии со значением R-квадрат выбрать наилучшую форму прогнозирующей функции, а затем построить прогноз на один, два или три временных интервала.

Технология построения трендовой модели:

1. Поострить график. На основе визуального анализа графика делается вывод о форме аналитической кривой, способной наилучшим образом аппроксимировать ломаную на графике. В данном случае квадратичная функция (полином 2 порядка). Но для подтверждения нашего вывода построим методом наименьших квадратов, кроме квадратичной, еще и линейную.



2. Для построения линии тренда необходимо выделить временной ряд и выбрать в контекстном меню команду **Добавить линию тренда**. Откроется диалоговое окно **Линия тренда** (рис. 9.1), которое содержит две вкладки **Тип** и **Параметры**. На вкладке **Тип** задается тип тренда, а вкладка **Параметры** предназначена для задания параметров тренда.

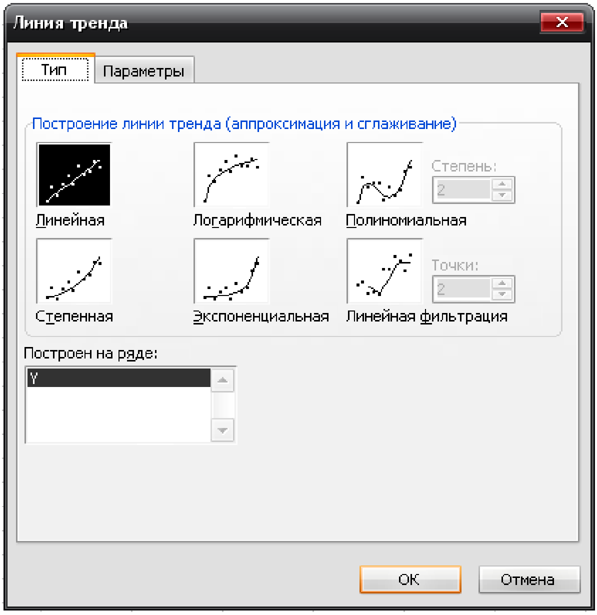


Рис. 9.1. *Диалоговое окно Линия тренда – вкладка Тип*

Оценивая значение R-квадрат можно утверждать, что квадратичная функция (полином 2 порядка) точнее, чем линейная, аппроксимирует исходные данные (R^2 = 0,62 линейной функции; R^2 = 0,74 квадратичной функции).

Это же можно видеть и на графиках аппроксимации (рис. 9.2, рис. 9.3).

Таким образом, прогнозирующее уравнение имеет вид:

$$Y = -0{,}1x^2 + 1{,}5167x + 22{,}05$$

Прогноз осуществляется на основе экстраполяции значений прогнозирующей функции. Например, ***прогноз выпуска продукции на следующий 10-й год*** при предположении, что условия функционирования предприятия будут такими же, как в предшествующих периодах, ***составит***:

$$Y = -0,1 \cdot 10^2 + 1,5167 \cdot 10 + 22,05$$
$$Y = -10 + 15,167 + 22,05 = \mathbf{27,217\ тыс.\ руб.}$$

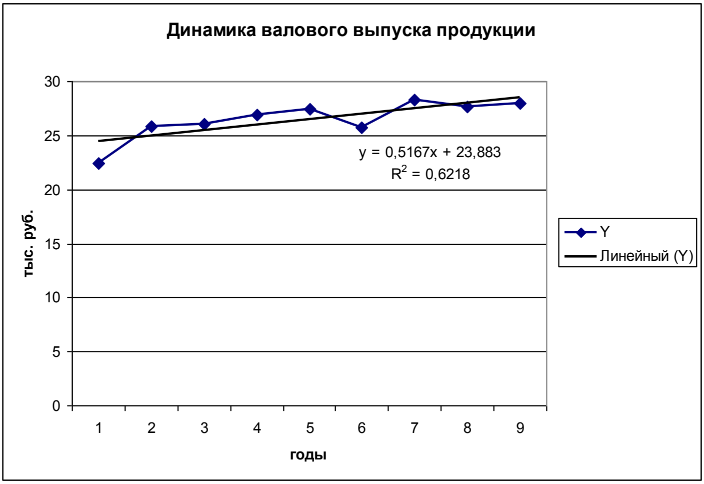


Рис. 9.2. *Линейный тренд*

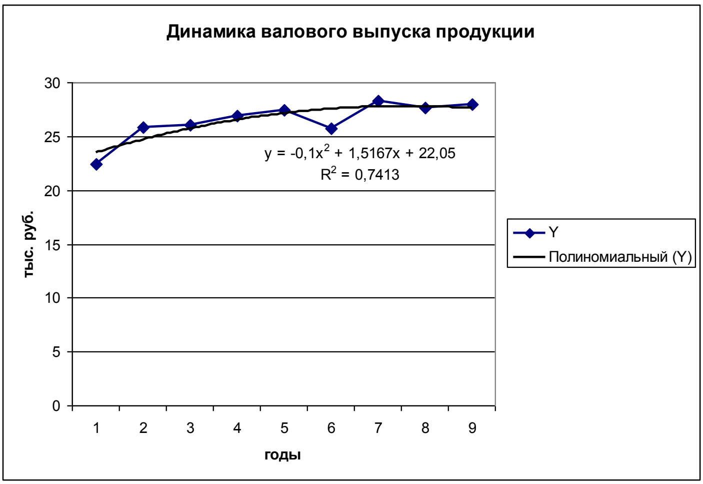


Рис. 9.3. *Полиномиальный тренд*

10. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ

§ 1. Виды и цели планирования

Одной из основных функций управления предприятием является планирование. **Планирование** – деятельность по подготовке управленческих решений.

Различают следующие виды планирования.

Перспективное планирование – это разработка планов развития объекта на длительный срок.

Технико-экономическое планирование – это производственное планирование, которое заключается в разработке планов по укрупненным экономическим показателям. Это прежде всего планы выпуска продукции, материально-технического обеспечения, по труду и заработной плате, себестоимости продукции и финансам.

Оперативно-производственное планирование отличается более детальной проработкой планов по номенклатуре, местам и срокам выполнения изделий.

Народнохозяйственное, региональное и отраслевое планирование – это виды планирования, предназначенные для обеспечения рационального комплексного развития соответствующих макрообъектов экономики.

На уровне предприятия методы планирования классифицируют по ряду признаков, к числу основных из которых относятся:

- временной признак;
- направление хозяйственной деятельности;
- технологический этап производственной деятельности.

На рис. 10.1 указано сочетание значений перечисленных признаков, обеспечивающих процесс планирования на предприятии.

Совокупность этих правил планирования часто представляют в форме двух тесно взаимоувязанных подсистем:

- планирование развития предприятия (бизнеса);
- планирование действующего производства.

Планирование развития предприятия состоит из разработки стратегической концепции развития предприятия и разработки стратегического[6] плана его развития.

Стратегическое планирование представляет собой набор действий и решений, предпринятых руководством, которые ведут к разработке специфических стратегий, предназначенных для того, чтобы помочь организации достичь своих целей.

Процесс стратегического планирования является инструментом, помогающим в принятии управленческих решений. Его задача – обеспечить нововведения и изменения в организации в необходимой степени.

Стратегический план должен разрабатываться с точки зрения перспективы корпорации.

Стратегический план должен обосновываться обширными исследованиями и фактическими данными. Чтобы эффективно конкурировать в сегодняшнем мире бизнеса, предприятие (фирма, организация) должно постоянно заниматься сбором и анализом огромного количества информации об отрасли, рынке, конкуренции и других факторах.

---

[6] Стратегия [strategos – искусство генерала] представляет собой детальный всесторонний комплексный план, предназначенный для того, чтобы обеспечить осуществление миссии организации и достижение ее целей.

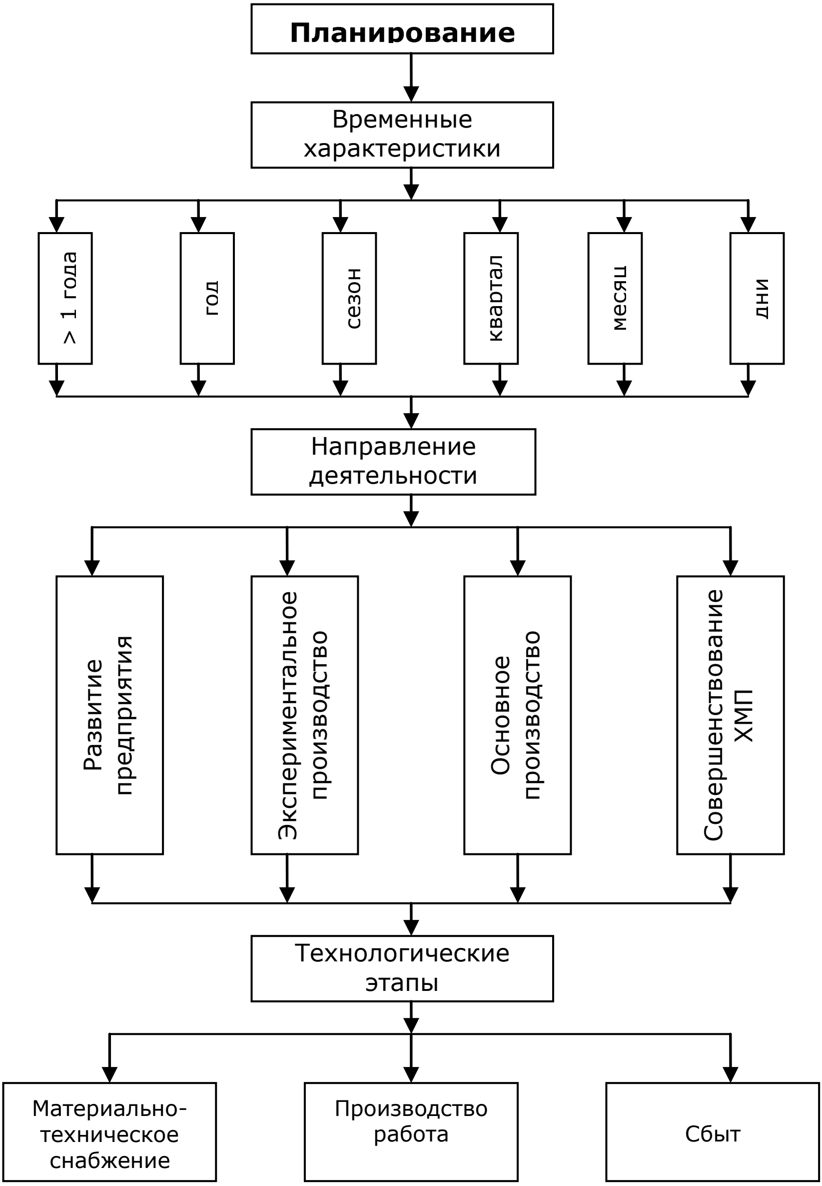


Рис. 10.1. *Структура системы планирования предприятия*

Стратегический план придает предприятию определенность, индивидуальность, что позволяет ему привлекать определенные типы работников.

Наконец, стратегические планы должны быть разработаны так, чтобы не только оставаться целостными в течение длительных периодов времени, но и быть достаточно гибкими, чтобы при необходимости можно было осуществить их модификацию и переориентацию.

Первым и, может быть, самым существенным решением при планировании будет выбор целей организации.

Основная общая цель организации – четко выраженная причина ее существования – обозначается как ее миссия. Цели вырабатываются для осуществления этой миссии. Миссия детализирует статус предприятия и обеспечивает направление и ориентиры для определения целей и стратегий на различных организационных уровнях.

Процесс планирования развития предприятия обеспечивает утвержденной генеральным директором системой правил (методик), действие которых не должно пересматриваться на протяжении достаточно долгого периода времени (два-три года) и которые регламентируют решение вопросов:

- прогнозирования перспективных условий функционирования предприятия как бизнеса;
- оценки и целесообразности изменения правовой формы предприятия;
- оценки стоимости и эффективности предприятия как бизнеса;
- определения условий диверсификации (изменения направления) деятельности предприятия;
- определения стратегической концепции (целеполагания) развития предприятия, важнейшей составной частью которой должна являться

стратегическая доктрина развития действующего производства;
- оценки и выбора наиболее эффективных бизнес-проектов развития действующего производства.

Планирование действующего производства, в свою очередь делится на:

- календарное планирование, которое состоит из разработки годовых, сезонных, квартальных и месячных планов производства;
- оперативное планирование, которое обеспечивает разработку плановых заданий производственным подразделениям на неделю, день, смену.

Исходя из сказанного, систему планирования предприятия можно рассматривать, так как это представлено на рис. 10.2.

На рис. 10.2 выделены перечисленные выше уровни планирования:

уровень 1 – планирование развития предприятия как бизнеса;

уровень 2 – календарное планирование производства;

уровень 3 – оперативное планирование производства.

Прямоугольниками на рисунке обозначены основные выходные документы, результирующие комплекс работ соответствующего уровня планирования.

Стрелками – логика и последовательность взаимосвязи работ. В основе классификации видов планирования по уровням на рис. 10.2 лежит *временной признак*. Уровень первый – это долгосрочное планирование (от 2-х – 3-х лет и свыше). Уровень второй – это календарное планирование (год, сезон, квартал, месяц). Уровень третий – оперативное планирование (смена, день, неделя). На всех этапах планирования широко применяются математические методы, которые приведены в следующих параграфах.

Рис. 10.2. *Схема планирования предприятия*

§ 2. Календарное планирование

Любая деятельность протекает во времени, поэтому во многих практических важных случаях оказывается необходимым определить, когда что делать, то есть составить ***календарный план*** выполнения работ. Календарный план производит увязку во времени всех действий, направленных на достижение цели. Это должно привести к улучшению плана и сокращению сроков его осуществления. Специфика возникающих задач календарного планирования, их объем, сложность привели к развитию особой группы моделей и специальных методов решений, которые изучаются в разделе исследования операций, называемой ***теорией расписания***.

Если размерность задачи (число переменных) не очень велика, то могут быть использованы графические или табличные методы представления календарного плана. При ***графическом методе*** наглядно изображается (с соблюдением масштаба времени) очередность выполнения работ, их взаимное расположение во времени. ***Табличный метод*** представления календарных планов, как видно из его названия, основан на использовании разных таблиц. Зачастую необходимость в таблицах появляется уже просто из-за значительного числа переменных в задаче, когда на графике (на рисунке) происходи слияние всех линий с полной потерей обозримости графика. Кроме того, таблица может содержать значительно больший объем информации, чем график. Рассмотрим пример составления календарного плана.

Задача. Допустим есть два станка А и В, каждая деталь должна быть обработана ан станке А (причем в первую очередь) и на станке В (во вторую очередь). Считаются известными времена обработки каждой детали на каждом станке:

t_{iA} – время обработки i-й детали на станке А;

t_{iB} – время обработки i-й детали на станке В.

Для разных деталей эти времена, вообще говоря, различные. Важными ограничениями (кроме ограничения на последовательность обработки) являются следующие условия:

– на каждом из станков можно одновременно обрабатывать только одну деталь;
– каждая деталь может обрабатываться только на одном станке;
– процесс обработки детали не может прерываться.

Надо определить вариант плана запуска деталей, при котором общее время обработки будет минимальным.

Последовательность запуска деталей в производство на любом станке может быть изменена так, что она совпадает с последовательностью на другом станке, без увеличения времени выполнения плана. Поэтому в оптимальном решении порядок выполнения работ на станке А совпадает с порядком выполнения работ на станке В. Поскольку на первом станке операции можно выполнять без всякой задержки, оптимизация заключается в минимизации времени простоя второго станка.

Решение задачи:

1. Записываются времена работ:

Номер детали	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Станок А	3	4	2	3	1
Станок В	2	1	3	5	4

2. Просматриваются все времена обработки, и находится минимальное среди них – $t_{2B} = 1$ и $t_{5A} = 1$.
3. Если минимальное время относится к первому станку (то есть это время t_{iA}, в примере $t_{5A} = 1$), то деталь с соответствующим номером ставится

на обработку первой (деталь №5 будет первой обрабатываться на станке А, а значит и на В).

4. Если минимальное время относится ко второму станку (то есть это время t_{iB}), то деталь с соответствующим номером ставится на обработку последней (деталь №1 будет обрабатываться последней).
5. «Забывают» выбранную деталь.
6. Повторяют все сказанное с оставшимися деталями.
7. Если время обработки двух разных деталей на одном станке совпадает и это время меньше времени обработки на другом станке, то порядок обработки этих деталей произволен.

Для приведенного примера оптимальная последовательность обработки выглядит так: 5 – 3 – 4 – 1 – 2, общее время обработки – 16 единиц времени. Для сравнения: обработка в последовательности 1 – 2 – 3 – 4 – 5 потребует 21 единицу времени.

§ 3. Балансовый метод планирования

Межотраслевой баланс (МОБ) производства и распределения продукции является результатом развития балансового метода анализа и планирования народного хозяйства.

Для анализа планирования структуры общественного производства строят МОБ производства и распределения продукции и услуг.

Таблицу МОБ строят по двум схемам:

1) поступление ресурсов, их использование
2) производство продукции, распределение продукции

Межотраслевые балансы бывают стоимостные и плановые. МОБ строится в виде таблицы.

Распределение / Производство	Валовая продукция	Текущее производство, потребление			Конечная продукция
		с.-х.	промышленность	прочие отрасли	
Сельское хозяйство	Z_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	V_1
Промышленность	Z_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	V_2
Прочие отрасли	Z_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	V_3
Оплата труда		K_1	K_2	K_3	
Чистый доход		P_1	P_2	P_3	
Валовая продукция	Z	Z_1	Z_2	Z_3	

Показатели строк таблицы (x_{11}, x_{12}, …, x_{33}) выражают затраты продукции отрасли, которая необходима всем другим отраслям для производства своей продукции. Сумма показателей каждой строки характеризует общую потребность всех отраслей в продукции каждой отрасли.

Показатели каждого столбца характеризуют материальные затраты по отрасли на продукцию всех отраслей при производстве своей продукции. Сумма показателей столбца характеризует общие материальные затраты каждой отрасли на производство своей продукции.

В каждом столбце таблицы МОБ дана не только структура материальных затрат соответствующей отрасли, но и чистая продукция каждой отрасли. Она состоит из суммы оплаты труда K_j и прибыли P_j данной отрасли. Оплата труда включает различные виды доходов работников материального производства. Прибыль включает различные виды чистого дохода.

Валовую продукцию каждой отрасли можно представить двояко. С одной стороны, это сумма материальных затрат каждой отрасли на производство своей продукции и ее чистой продукции:

$$\begin{cases} Z_1 = x_{11} + x_{21} + x_{31} + K_1 + P_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Z_3 = x_{13} + x_{23} + x_{33} + K_3 + P_3 \end{cases}$$

С другой стороны, для любой производящей отрасли это сумма материальных затрат потребляющих ее продукцию отраслей и конечной продукции отрасли:

$$\begin{cases} Z_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13} + V_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Z_3 = x_{31} + x_{32} + x_{33} + V_3 \end{cases}$$

Уравнения системы называются уравнениями распределения продукции отраслей материального производства.

Задача. Дана таблица МОБ, в которой приведены показатели прямых затрат и объемы конечной продукции трех взаимосвязанных отраслей: промышленности, сельского хозяйства, прочие отрасли.

Производящие отрасли	Потребляющие отрасли			Конечная продукция
	промышленность	сельское хозяйство	прочие отрасли	
Промышленность	0,1	0,12	0,125	100
Сельское хозяйство	0,05	0,04	0,075	200
Прочие отрасли	0,3	0,12	0,025	300

По этим данным рассчитать валовую продукцию каждой отрасли, межотраслевые поставки и чистую продукцию отраслей.

Матрицу полных затрат определим итерационным методом, ограничившись четырьмя членами разложения

Матрица полных затрат имеет вид

$$\overline{A} = \left[I - A\right]^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^n$$

По условию принимаем, что матрица полных затрат имеет вид

$$\overline{A} = [I - A]^{-1} = I + A + A^2 + A^3$$

Матрица А по условию задачи имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}12 & 0{,}125 \\ 0{,}05 & 0{,}04 & 0{,}075 \\ 0{,}3 & 0{,}12 & 0{,}025 \end{pmatrix}$$

Поэтому необходимо еще найти вторую и третью степени матрицы А:

$$A = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}12 & 0{,}125 \\ 0{,}05 & 0{,}04 & 0{,}075 \\ 0{,}3 & 0{,}12 & 0{,}025 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}12 & 0{,}125 \\ 0{,}05 & 0{,}04 & 0{,}075 \\ 0{,}3 & 0{,}12 & 0{,}025 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}0535 & 0{,}0318 & 0{,}024625 \\ 0{,}0295 & 0{,}0166 & 0{,}011125 \\ 0{,}0435 & 0{,}0438 & 0{,}047125 \end{pmatrix}$$

(элемент a_{11} произведения этих матриц равен

$$0{,}1 \cdot 0{,}1 + 0{,}12 \cdot 0{,}05 + 0{,}125 \cdot 0{,}3 = 0{,}0535 \text{ и т. п.)}$$

Далее найдем A^3 как произведение матрицы A^2 на А:

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0,0535 & 0,0318 & 0,024625 \\ 0,0295 & 0,0166 & 0,011125 \\ 0,0435 & 0,0438 & 0,047125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,1 & 0,12 & 0,125 \\ 0,05 & 0,04 & 0,075 \\ 0,3 & 0,12 & 0,025 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0,01433 & 0,01065 & 0,00969 \\ 0,00712 & 0,00554 & 0,00521 \\ 0,02068 & 0,01263 & 0,00990 \end{pmatrix}$$

По формуле $\overline{A} = [I - A]^{-1} = I + A + A^2 + A^3$ приближенно матрица полных затрат равна

$$\overline{A} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 & 0,12 & 0,125 \\ 0,05 & 0,04 & 0,075 \\ 0,3 & 0,12 & 0,025 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,0535 & 0,0318 & 0,024625 \\ 0,0295 & 0,0166 & 0,0011125 \\ 0,0435 & 0,0438 & 0,047125 \end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix} 0,01433 & 0,01065 & 0,00969 \\ 0,00712 & 0,00554 & 0,00521 \\ 0,02068 & 0,01263 & 0,00990 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1678 & 0,1624 & 0,1593 \\ 0,0866 & 1,0621 & 0,0913 \\ 0,3642 & 0,1764 & 1,0820 \end{pmatrix}$$

Пользуясь полученной матрицей полных затрат, по формуле Z=Ā· Y вычислим объемы валовой продукции рассматриваемых отраслей при $Y_1 = 100$, $Y_2 = 200$ и $Y_3 = 300$ как произведение матрицы полных затрат на матрицу-столбец готовой продукции:

$Z_1 = 1,1678 \cdot 100 + 0,1624 \cdot 200 + 0,1593 \cdot 300 = 197,05$
$Z_2 = 0,0866 \cdot 100 + 1,0621 \cdot 200 + 0,0913 \cdot 300 = 248,47$
$Z_3 = 0,3642 \cdot 100 + 0,1764 \cdot 200 + 1,0820 \cdot 300 = 396,3$

Межотраслевые поставки рассчитаем по формуле $x_{ij} = a_{ij} x_j$:

$x_{11} = a_{11} x_1 = 0,1 \cdot 197,05 \approx 19,70$
$x_{12} = a_{12} x_2 = 0,12 \cdot 248,47 \approx 29,82$
$x_{13} = a_{13} x_3 = 0,125 \cdot 396,3 \approx 49,54$
$x_{21} = a_{21} x_1 = 0,05 \cdot 197,05 \approx 9,85$

$x_{22} = a_{22}x_2 = 0{,}04 \cdot 248{,}47 \approx 9{,}94$
$x_{23} = a_{23}x_3 = 0{,}075 \cdot 396{,}3 \approx 29{,}72$
$x_{31} = a_{31}x_1 = 0{,}3 \cdot 197{,}05 \approx 59{,}12$
$x_{32} = a_{32}x_2 = 0{,}12 \cdot 248{,}47 \approx 29{,}82$
$x_{33} = a_{33}x_3 = 0{,}025 \cdot 396{,}3 \approx 9{,}91$

Полученные данные поместим в сводной таблице межотраслевого баланса, а также рассчитаем объемы чистой продукции каждой отрасли, которые найдены как разности объемов валовой продукции и сумм производственных затрат соответствующей отрасли.

Производящие отрасли	Валовая продукция	Межотраслевые поставки			Конечный продукт
		промышленность	сельское хозяйство	прочие отрасли	
Промышленность	197,05	19,70	29,82	49,54	100
Сельское хозяйство	248,47	9,85	9,94	29,72	200
Прочие отрасли	396,3	59,12	29,82	9,91	300
Чистая продукция	-	108,38	178,89	307,13	-
Валовая продукция	841,82	197,05	248,47	396,3	-

§ 4. Сетевое планирование

Назначение и области применения сетевого планирования и управления

Поиски более эффективных способов планирования сложных процессов привели к созданию принципиально новых методов сетевого планирования и управления.

Сетевое планирование и управление (СПУ) – это метод планирования и управления, основанный на применении ЭВМ и сетевых графиков.

СПУ основано на моделировании процесса с помощью сетевого графика и представляет собой совокупность расчетных методов, организационных и контрольных мероприятий по планированию и управлению комплексом работ.

Система СПУ позволяет:

- формировать календарный план реализации некоторого комплекса работ;
- выявлять и мобилизовывать резервы времени, трудовые, материальные и денежные ресурсы;
- осуществлять управление комплексом работ по принципу "ведущего звена" с прогнозированием и предупреждением возможных срывов в ходе работ;
- повышать эффективность управления в целом при четком распределении ответственности между руководителями разных уровней и исполнителями работ.

Диапазон применения СПУ весьма широк: от задач, касающихся, деятельности отдельных лиц, до проектов, в которых участвуют сотни организаций и десятки тысяч людей (например, разработка и создание крупного территориально-промышленного комплекса).

Для того чтобы составить план работ по осуществлению больших и сложных проектов, состоящих из тысяч отдельных исследований и операций, необходимо описать его с помощью некоторой математической модели. Таким средством описания проектов (комплексов) является *сетевая модель*.

Сетевая модель и ее основные элементы

Сетевая модель представляет собой план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), заданного в специфической форме сети, графическое изображение которой называется *сетевым графиком*.

Главными элементами сетевой модели являются *события* и *работы*.

Термин *работа* используется в СПУ в широком смысле. Во-первых, это *действительная работа* – протяженный во времени процесс, требующий затрат ресурсов (например, сборка изделия, испытание прибора и т.п.). Каждая действительная работа должна быть конкретной, четко описанной и иметь ответственного исполнителя.

Во-вторых, это *ожидание* – протяженный во времени процесс, не требующий затрат труда (например, процесс сушки после покраски, старения металла, твердения бетона и т.п.).

В-третьих, это *зависимость,* или *фиктивная работа* – логическая связь между двумя или несколькими работами (событиями), не требующими затрат труда, материальных ресурсов или времени. Она указывает, что возможность одной работы непосредственно зависит от результатов другой. Естественно, что продолжительность фиктивной работы принимается равной нулю.

Событие – это момент завершения какого-либо процесса, отражающий отдельный этап выполнения проекта.

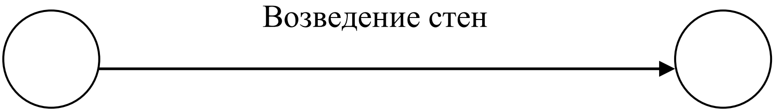
Среди событий сетевой модели выделяют *исходное* и *завершающее* события. Исходное событие не имеет предшествующих работ и событий, относящихся к представленному в модели комплексу работ. Завершающее событие не имеет последующих работ и событий.

События на сетевом графике изображаются кружками, а работы стрелками, показывающими связь между работами.

Для построения сетевого графика необходимо:

- составить перечень работ;
- определить последовательность этих работ;
- указать продолжительность и стоимость этих работ, а также необходимо определить времен-

ные параметры событий и работ.



Пример фрагмента сетевого графика

Временные параметры сетевых графиков

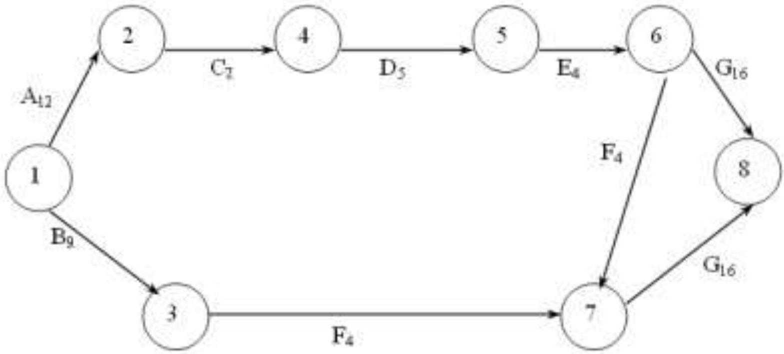
Задача. Для подготовки финансового плана на следующий год фирме необходимо получить данные отделов сбыта, производства, финансов и бухгалтерии. В таблице указаны соответствующие операции и их продолжительность. Построить сетевую модель и определить временные параметры событий.

Таблица 10.1. *Исходные данные*

Операция	Описание	Предшествующие операции	Продолжительность (в днях)
A	Разработка прогноза сбыта	-	12
B	Изучение конъюнктуры рынка	-	9
C	Подготовка чертежей изделия и технологии	A	7

	его производства		
D	Разработка планов производства	C	5
E	Оценка себестоимости производства	D	4
F	Определение цены изделия	B, E	4
G	Разработка финансового плана	E, F	16

Решение:



Путь – последовательность событий.

Путь, который соединяет исходное и завершающее события, называется полным. Полный путь, имеющий максимальную продолжительность, называется критическим.

$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \quad \alpha_1 = 48$ дней

$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \quad \alpha_2 = 44$ дней

$1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \quad \alpha_3 = 29$ дней

$\alpha_1 = 48$ дней – критический путь

Ранний срок свершения события $t_р(i)$ – это максимальный по продолжительности путь, входящий в данное событие, считая от начального.

Поздний срок свершения события $t_п(i)$ – определяется как разность между длиной критического пути и максимальным по продолжительности путем, входящим в данное событие, считая от завершающего.

Резерв времени свершения события

$$R(i) = t_п(i) - t_р(i)$$

Эта величина показывает, на сколько можно задержать наступление события, не увеличивая при этом срок выполнения работ.

Таблица 10.2. *Расчет резерва времени*

Событие i	Ранний срок $t_р(i)$	Поздний срок $t_п(i)$	Резерв времени R(i)
1	0	0	0
2	12	12	0
3	9	28	19
4	19	19	0
5	24	24	0
6	28	28	0
7	32	32	0
8	48	48	0

Резерв времени события 3 – R(3)=19 – означает, что время свершения события 3 может быть задержано на 19 дней без увеличения общего срока выполнения проекта. Анализируя таблицу 2, видим, что не имеют резервов времени события 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8. Эти события и образуют критический путь.

Оптимизация сетевого графика

После нахождения критического пути и резервов времени работ и оценки вероятности выполнения проекта в заданный срок должен быть проведен всесторонний анализ сетевого графика и приняты меры по его оптимизации. Этот весьма важный этап в разработке сетевых графиков раскрывает основную идею СПУ. Он заключается в приведении сетевого графика в соответствие с заданными сроками и возможностями организации, разрабатывающей проект.

Оптимизация сетевого графика представляет процесс улучшения организации выполнения комплекса работ с учетом срока его выполнения. оптимизация проводится с целью сокращения длины критического пути, выравнивания коэффициентов напряженности работ, рационального использования ресурсов.

Комплексная оптимизация заключается в определении оптимального соотношения величины стоимости и срока выполнения работ.

Таблица 10.3. *Исходные данные для оптимизации сетевого графика*

№ п/п	Работа (i, j)	Продолжительность работ, дней		Коэффициент затрат на ускорение работ k (i, j)	Стоимость работы, ден. ед. C (i, j)
		min a (i, j)	max b (i, j)		
	(1, 2)	7	12	6	30
	(1, 3)	5	9	3	25
	(2, 4)	4	7	2	30
	(4, 5)	3	5	8	15
	(5, 6)	2	4	3	10
	(3, 7)	2	4	2	20
	(6, 7)	2	4	6	10
	(6, 8)	9	16	4	50
	(7, 8)	9	16	5	40
	Итого				230

Примечание:

$$k(i, j) = tg\alpha = \frac{C_{\max}(i, j) - C_{\min}(i, j)}{b(i, j) - a(i, j)}$$

Величина k (i, j), равна тангенсу угла α наклона аппроксимирующей прямой, показывает затраты на ускорение работы где a (i, j) – минимально возможная (экстренная) продолжительность работы (i, j), которую только можно осуществить в условиях разработки;

b (i, j) – нормальная продолжительность выполнения работы (i, j).

Стоимость C (i, j) работы (i, j) заключена в границах от C_{min} (i, j) (при нормальной продолжительности работ) до C_{max} (i, j) (при экстренной продолжительности работ).

Для удобства дальнейших расчетов представим эти пути графически в виде цепочек работ, в которых цифры над стрелками показывают коэффициенты затрат на ускорение работ, а под стрелками – максимально возможные величины уменьшения продолжительности работ $\Delta t(i, j) = b(i, j) - a(i, j)$.

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \quad \alpha_1 = 48 \text{ дней}$$

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \xrightarrow{\qquad\qquad} 8 \quad \alpha_2 = 44 \text{ дней}$$

$$1 \xrightarrow{\quad} 3 \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad} 7 \longrightarrow 8 \quad \alpha_3 = 29 \text{ дней}$$

Сокращение продолжительности работ проводим до тех пор, пока они не будут сжаты до min продолжительности. Уменьшить продолжительность выполнения комплекса можно за счет сокращения продолжительности работ критического пути $t_{кр}= t(\alpha_2)$

I шаг. Из работ критического пути (α_2) наименьший коэффициент затрат на ускорение имеет работа (2, 4)

min (6, 2, 8, 3, 6, 5) = 2 сокращаем работу (2, 4) не более чем на 3 дня

Стоимость проекта за счет ускорения работы (2, 4) возрастает С=230+2·3=236 ден. ед.

Новые длины путей $\alpha_1 = 44 - 3 = 41$ $\alpha_2 = 48 - 3 = 45$ $\alpha_3 = 29$

II шаг. min (6, 8, 3, 6, 5) = 3 сокращаем работу (5, 6) на 2 дня

Стоимость проекта за счет ускорения работы (5, 6) возрастает C=236+3·2=242 ден. ед.

α_1= 41 – 2 = 39 α_2= 45 – 2 = 43 α_3= 29

III шаг. min (6, 8, 6, 5) = 5 сокращаем работы (7, 8) и (6, 8) на 7 дней

Стоимость проекта за счет ускорения работ возрастает C=242+5·7+4·7=305 ден. ед.

α_1= 39 – 7 = 32 α_2= 43 – 7 = 36 α_3= 29 – 7 = 22

IV шаг. min (6, 8, <u>6</u>) = 6 сокращаем работу (1, 2) на 5 дней

Стоимость проекта за счет ускорения работы (1, 2) возрастает C=305+6·5=335 ден. ед.

α_1= 32 – 5 = 27 α_2= 36 – 5 = 31 α_3= 22

V шаг. min (6, 8) = 6 сокращаем работу (6, 7) на 2 дня

Стоимость проекта за счет ускорения работы (6, 7) возрастает C=335+6·2=347 ден. ед.

α_1= 27 α_2= 31 – 2 = 29 α_3= 22

VI шаг. Сокращаем работу (4, 5) с k=8 на 2 дня

Стоимость проекта за счет ускорения работы (4, 5) возрастает C=347+8·2=363 ден. ед.

α_1= 27 – 2 = 25 α_2= 29 – 2 = 27 α_3= 22

C	α
363	27
347	29
335	31
305	36
242	43
236	45
230	48

График оптимальной зависимости стоимости проекта C(t) от продолжительности его выполнения представим на рисунке 10.3.

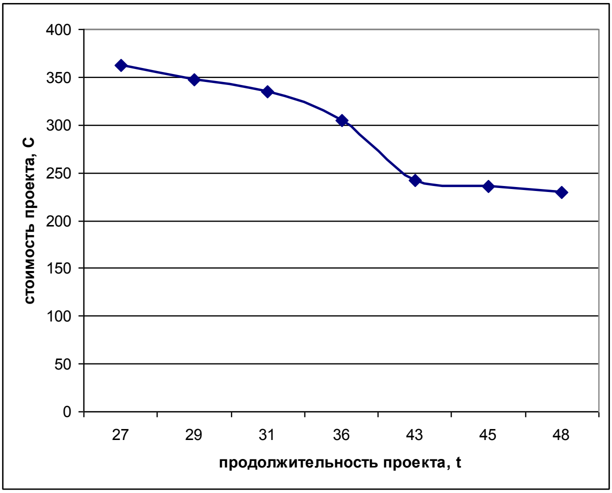


Рис. 10.3. *График оптимальной зависимости стоимости проекта C(t) от продолжительности его выполнения*

С помощью этого графика, можно, с одной стороны, оценить минимальную стоимость проекта при любом возможном сроке его выполнения, а с другой стороны – найти предельную продолжительность выполнения проекта при заданной его стоимости. Например, при продолжительности проекта t=45 дней минимальная стоимость выполнения комплекса составит 236 усл. ден. ед., а при стоимости выполнения комплекса, например, 340 усл. ден. ед. предельная продолжительность проекта составит 30 дней. С помощью функции можно оценить дополнительные затраты, связанные с сокращением сроков завершения комплекса. Так сокращение продолжительности проекта с 45 дней до 30 дней потребует дополнительных затрат 340 – 236 = 104 усл. ден. ед.

11. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРИНЯТИЯ ХОЗЯЙСТВЕННЫХ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

§ 1. Виды неопределенности

Существует большое количество задач, в которых невозможно однозначно определить основные параметры и переменные модели изучаемого процесса или явления. В этом случае говорят, что принятие хозяйственных решений осуществляется в условиях неопределенности.

Различают два вида неопределенности. Первый – это ***стохастическая неопределенность***, или ***неопределенность первого порядка***, то есть ситуация, в которой предполагается, что для неопределенных параметров может быть установлено вероятное распределение. В этом случае часто прибегают к изучению функции плотности вероятностей, определяют среднее значение случайной величины, ее дисперсию и т.п., что в конечном счете позволяет сделать вывод о допустимом варианте хозяйственного решения по некоторому заранее определенному, как правило, пороговому критерию. Применение вероятностных методов моделирования экономических процессов оправдывает себя только в тех случаях, когда есть возможность накопить и обработать большое количество статистической информации, обеспечивающей репрезентативность анализируемых выборок.

Второй вид неопределенности – это неопределенность, при которой неизвестно вероятностное распределение интересующей величины, но определена область ее изменения. Неопределенность такого вида называют ***неопределенностью второго порядка***. Возникает неопределенность второго порядка по двум причинам: в связи с действием людей, преследующих иные цели в некоторой экономической ситуации, или в связи с поведением некоторых непредсказуемых природных факторов.

Для принятия подобных решений предлагаются некоторые логические критерии принятия хозяйственных решений.

Одним из таких подходов является ***принцип гарантированного результата***. Его смысл состоит в том, что выбирается такой x-параметр (план или управление), определяемый нами, при котором некоторый интересующий нас показатель W(x, y) достигает наилучшего (наибольшего) значения при условии, что y, неопределенный параметр, принимает наихудшее значение. Математически принцип гарантированного результата определяется по следующему алгоритму.

1. Для каждого управления x находится наихудшее значение показателя W(x, y):

$$W_m(x) = \min_{y \in Y} W(x, y), x \in X$$

2. После этого выбирается такое управление $x \in X$, при котором достигается наибольшее значение $W_m(x)$:

$$W^* = \max_{x \in X} W_m(x) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} W(x, y)$$

Величина W* – это такое значение показателя W(x, y), которое можно гарантировать при наихудшем для нас поведении (значении) неопределенного параметра y. Этот критерий выбора называется ***критерием Вальда***.

Противоположный принципу гарантированного результата подход основан на оптимистическом предположении, что неизвестный параметр y будет принимать наилучшие для нас значения. В этом случае выбор управляющего решения основывается на определении W* по формуле

$$W^* = \max_{x \in X} \max_{y \in Y} W(x, y)$$

Однако этот критерий слишком оптимистичен, поэтому чаще применяется ***критерий Гурвица***, состоящий в выборе такого управления *x*, при котором достигается

$$W^* = \max_{x \in X} \left(\alpha \min_{y \in Y} W(x, y) + (1 - \alpha) \max_{y \in Y} W(x, y) \right)$$

где α принимает значение от 0 до 1. При α = 1 получается пессимистический подход к принятию решения на основе принципа гарантированного результата, при α = 0 – оптимистический подход.

Критерий Лапласа – это критерий опирается на известный принцип недостаточного обоснования. Поскольку вероятности состояний x_1, x_2, …, x_n не известны, необходимая информация для вывода, что эти вероятности различны, отсутствует. В противном случае можно было бы определить эти вероятности и ситуацию уже не следовало рассматривать как принятие решения в условиях неопределенности. Так как принцип недостаточного обоснования утверждает противоположное, то состояния x_1, x_2, …, x_n имеют равные вероятности. Если согласиться с приведенными доводами, то исходную задачу можно рассматривать как задачу принятия решения в условиях риска, когда выбирается действие a_i, дающее наибольший ожидаемый выигрыш. Другими словами, находится действие a^*_i, соответствующее

$$\max_{a_i} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} v(a_i, x_j) \right\}$$

где $1/n$ – вероятность реализации состояния x_j ($j=1, 2,…, n$).

Интересен подход, предложенный ***Л. Сэвиджем***. Он состоит в следующем. Для каждого значения $y \in Y$ находится функция:

$$B(y) = \max_{x \in X} W(x, y)$$

которая показывает, какое наилучшее значение показателя $W(x, y)$ можно получить при значении $y \in Y$.

Это значение показателя можно было бы получить, если бы было известно значение параметра y заранее. Строится новый показатель:

$$V(x, y) = B(y) - W(x, y) = \max_{x \in X} W(x, y) - W(x, y)$$

Показатель называется ***функцией риска*** (функцией потерь или функцией сожалений). Он показывает потери (отклонения от наилучшего значения $B(y)$) для каждого управления $x \in X$ при всех значениях параметра $y \in Y$. Критерий Сэвиджа состоит в выборе решения на основе функции риска $V(x, y)$ с использованием принципа гарантированного результата, то есть ищется такое решение, при котором достигается:

$$W^* = \min_{x \in X} \max_{y \in Y} (\max_{x \in X} W(x, y) - W(x, y))$$

Использование этого подхода позволяет уменьшить риск при принятии решения.

Тем не менее, необходимо помнить, что все приведенные критерии имеют высокую степень произвольности.

Задача. Одно из предприятий должно определить уровень предложения услуг так, чтобы удовлетворить потребности клиентов в течение предстоящих праздников. Точное число клиентов не известно, но ожидается, что оно может принять одно из четырех значений: 200, 250, 300 или 350 клиентов. Для каждого из этих возможных значений существует наилучший уровень предложения (с точки зрения возможных затрат). Отклонения от этих уровней приводят к дополнительным затратам либо из-за превышения предложения над спросом, либо из-за неполного удовлетворения спроса.

Ниже представлена матрица А, определяющая потери (усл. ден. ед.).

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{клиенты} \\
 & \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\
A = & \begin{pmatrix} 5 & 10 & 18 & 25 \\ 8 & 7 & 8 & 23 \\ 21 & 18 & 12 & 21 \\ 30 & 22 & 19 & 15 \end{pmatrix}
\end{array}
\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array}
\text{ уровень предложения}
$$

1) ***Критерий Вальда*** – критерий максимальной полезности.

Так как матрица представляет потери, применяем минимаксный критерий.

$$W = \min_i(\max_i x_{ij}) = \min_i\left(25, 23, 21, 30\right) = 21$$

Минимаксное значение равно 21 и соответствует стратегии a_3.

2) ***Критерий Гурвица*** – принятие решений от оптимистичного до пессимистичного.

Значение α между 0 и 1 может определяться в зависимости от склонности лица, принимающего решение, к пессимизму или оптимизму. При отсутствии ярко выраженной склонности α=1/2 представляется наиболее разумным.

Результаты вычислений:

Уровень предложения	min W	max W	$W^* = \min\limits_{x\in X}\left(\alpha \min\limits_{y\in Y} W(x,y) + (1-\alpha)\max\limits_{y\in Y} W(x,y)\right)$
1	5	25	W*=0,5·5+0,5·25=15 – min
2	7	23	W*=0,5·7+0,5·23=15 – min
3	12	21	W*=0,5·12+0,5·21=16,5
4	15	30	W*=0,5·15+0,5·30=22,5

Оптимальное решение заключается в выборе первого или второго уровня (минимальное значение 15 – так как матрица представляет потери).

3) ***Критерий Лапласа*** – появление различных ситуаций равновероятно.

Критерий Лапласа предполагает, что x_1, x_2, x_3, x_4 равновероятны. Следовательно, вероятность P(x_j)=1/4 и ожидаемые потери при различных действиях составляют:

L(x_1)=(1/4)·(5+10+18+25)=14,5

L(x_2)=(1/4)·(8+7+8+23)=11,5

L(x_3)=(1/4)·(21+18+12+21)=18,0

L(x_4)=(1/4)·(30+22+19+15)=21,5

Таким образом, наилучшим уровнем предложения в соответствии с критерием Лапласа будет второй (a_2).

4) Критерий Севиджа – худшим объявляется максимальный риск, а не минимальный выигрыш.

Определяем матрицу риска A^p (так как матрица A представляет потери, то находим минимальный элемент в столбце и вычитаем его из всех элементов столбца).

$$A^p = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 10 & 10 \\ 3 & 0 & 0 & 8 \\ 16 & 11 & 4 & 6 \\ 25 & 15 & 11 & 0 \end{pmatrix}$$

$W^* = \min(\max x_{ij}) = \min(10, 8, 16, 25) = 8$. Применение критерия Севиджа приводит к выбору второго уровня.

§ 2. Модели систем массового обслуживания

Характерным примером стохастических задач являются модели систем массового обслуживания.

Системы массового обслуживания имеют повсеместное распространение. Это телефонные сети, железнодорожные и авиационные кассы, автозаправочные станции и т.п. Основным признаком систем массового обслуживания является наличие некоторой ***обслуживающей системы***, которая предназначена для осуществления действий согласно требованиям поступающих в систему ***заявок***. Заявки поступают в систему случайным образом. Поскольку обслуживающая система, как правило, имеет ограниченную пропускную способность, а заявки поступают нерегулярно, то периодически создается очередь заявок в ожидании обслуживания, а иногда обслуживающая система простаивает в ожидании заявок. И то, и другое в экономических системах влечет непроизводительные издержки (потери), поэтому при проектировании систем массового обслуживания возникает задача нахождения рациональной пропускной способности системы, при которой достигается приемлемый компромисс между издержками от простоя в очередях в ожидании выполнения заявки и простоя системы от недогрузки. Впервые задачи такого типа были решены в работах А.К. Эрланга в начале прошлого века и легли в основу «Теории массового обслуживания», которая успешно развивается в настоящее время.

Таким образом, система массового обслуживания состоит из ***блока обслуживания***, ***потока заявок*** и ***очереди*** в ожидании обслуживания.

Блоки обслуживания в различных системах различаются между собой по многим показателям.

Во-первых, блок обслуживания может состоять из одного или нескольких «приборов». Под прибором понимается устройство или человек, обслуживающий заявки.

Например, в магазине может быть одна или несколько касс. В первом случае система называется ***одноканальной***, во втором – ***многоканальной***.

Во-вторых, системы массового обслуживания могут быть ***однофазными*** и ***многофазными***. В первом случае заявка обслуживается только одним прибором, во втором – последовательностью приборов. Например, касса в магазине – однофазная система, сберкасса – двухфазная, поскольку сначала клиент обслуживается контролером, а только затем получает деньги у кассира.

Вторая составляющая систем массового обслуживания – **входной поток заявок**. Обычно предполагают, что входной поток подчиняется некоторому вероятностному закону для длительности интервалов между двумя последовательно поступающими заявками, причем закон распределения считается не изменяющимся в течение некоторого достаточно продолжительного времени. Источник заявок неограничен.

Третья составляющая – **дисциплина очереди**. Эта характеристика описывает порядок обслуживания заявок, поступающих на вход системы. Чаще всего применяется дисциплина: «*первым пришел – первым обслужен*». Но возможны и другие порядки обслуживания: «*первым пришел – последним обслужен*», *случайный порядок обслуживания, обслуживание с приоритетами*.

В качестве примера применения системы массового обслуживания рассмотрим задачу проектирования автозаправочной станции (АЗС).

Пусть необходимо выбрать один из нескольких вариантов строительства АЗС. Автомобили пребывают на станцию случайным образом и, если не могут быть обслужены сразу, становятся в очередь. Дисциплина очереди – «*первым пришел – первым обслужен*». Предположим для простоты, что во всех вариантах рассматривается только одна бензоколонка, а вариант от варианта отличается лишь ее мощностью.

Предположим, статистические наблюдения позволили получить величину среднего количества клиентов μ, обслуживаемых в единицу времени. Обратная величина $1/\mu$ определяет среднее время обслуживания одного клиента.

Далее допускается стандартное предположение, что вероятность того, что обслуживание одного клиента, находящегося в процессе обслуживания в момент t, будет завершено в малом промежутке времени $[t, t + \tau]$, приблизительно равна $\mu\tau$, где $\mu > 0$.

Вероятность того, что обслуживание не закончится, считается приблизительно равной $1-\mu\tau$, а вероятность того, что будет закончено обслуживание двух или более клиентов, – пренебрежимо малой величиной. Тогда плотность распределения времени обслуживания имеет экспоненциальное распределение:

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}, \quad t \geq 0$$

Далее, исходя из того, что клиенты прибывают на АЗС случайно, предполагается, что вероятность прибытия одного клиента за любой малый промежуток времени $[t, t+\tau]$, начинающийся в произвольный момент времени t и имеющий длину τ, с точностью до пренебрежимо малых величин пропорциональна τ с некоторым коэффициентом пропорциональности $\lambda > 0$. Величина λ интерпретируется как среднее число клиентов, появляющихся в АЗС за единицу времени, а обратная ей величина $1/\lambda$ – как среднее время появления одного клиента. Вероятность того, что за этот промежуток времени не пребудет ни одного клиента, считается приблизительно равной $1 - \lambda\tau$, а вероятность прибытия двух или более клиентов – пренебрежимо малой величиной по сравнению со значением $\lambda\tau$. Из выдвинутых предположений в теории вероятностей делаются следующие выводы.

Во-первых, промежутки времени τ между двумя последовательностями появлениями клиентов удовлетворяют экспоненциальному распределению:

$$\varphi(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0$$

Во-вторых, вероятность того, что за любой уже не малый период времени *T* прибудет *n* клиентов, подсчитывается по формуле

$$P(n) = \frac{(\lambda T)^n e^{-\lambda t}}{n!}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

то есть входной поток заявок является пуассоновским.

Отметим, что, в отличие от среднего количества автомобилей, прибывающих в единицу времени на АЗС, то есть величины λ, величина μ зависит от выбранного нами варианта строительства АЗС. Поэтому имеет смысл рассматривать те проекты АЗС, для которых среднее время обслуживания $1/\mu$ меньше среднего промежутка времени $1/\lambda$ между прибытием клиентов, ибо в противном случае очередь будет постоянно расти. В том же случае, когда $1/\mu<1/\lambda$, через некоторое время после начала работы система перейдет в стационарный режим, то есть ее показатели не будут зависеть от времени.

Обозначив отношение λ/μ через ρ, можно показать, что стационарный режим устанавливается при $\rho < 1$. Величину ρ называют ***нагрузкой системы***. Тогда основные характеристики системы массового обслуживания определяются по формулам:

- ***коэффициент простоя системы***

$$E_1 = 1 - \rho$$

- ***среднее число клиентов в системе***

$$E_2 = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

- ***средняя длина очереди***

$$E_3 = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

- ***среднее время пребывания клиента в системе***

$$E_4 = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

- ***время пребывания клиента в очереди***

$$E_5 = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

На основе анализа значений приведенной системы показателей, характеризующих систему массового обслуживания, делается вывод о целесообразности выбора варианта строительства АЗС.

Задача. Пусть для общих условий постановки задачи по проектированию АЗС известны следующие данные: средний интервал между прибытиями автомобилей составляет 4 минуты. Варианты строительства АЗС имеют следующие средние времена обслуживания автомобилей: 5 мин, 3,5 мин, 2 мин, 1 мин, 0,5 мин. Результаты расчетов по исследованию различных вариантов строительства АЗС сведены в табл. 11.1.

Из анализа результатов расчетов следует:

Первый вариант строительства АЗС не годен из-за того, что очередь в этом случае будет расти до бесконечности.

Таблица 11.1. *Результаты расчетов*

Варианты	Характеристики СМО									
	$1/\lambda$	Δ	$1/\mu$	μ	ρ	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
1	4 мин	0,25	5 мин	0,2	1,25	-0,25	-5	-6,25	-20	-25
2	4 мин	0,25	3,5 мин	0,286	0,875	0,125	7	6,125	27,477	24,305
3	4 мин	0,25	2 мин	0,5	0,5	0,5	1	0,5	4	2
4	4 мин	0,25	1 мин	1	0,25	0,75	0,333	0,083	1,333	0,333
5	4 мин	0,25	0,5 мин	2	0,125	0,875	0,143	0,018	0,571	0,071

Второй вариант хорош по показателю загруженности оборудования ρ=0,875 и, следовательно, малой средней доли простоя оборудования E_1=0,125, но при этом варианте возникают большие очереди и, следовательно, большие средние времена простоя автомобилей E_4=27,477 мин.

Третий вариант приводит к тому, что оборудование в среднем половину времени простаивает, но среднее число автомобилей в системе равно только 1, а средние потери времени равны 4 мин при среднем времени обслуживания 2 мин.

В остальных вариантах очереди практически нет, но большую часть времени оборудование простаивает, поэтому эти варианты целесообразно отбросить как неэффективные.

Окончательный выбор варианта проекта АЗС, очевидно, принадлежит лицу, принимающему решение, но предварительная рекомендация по результатам анализа может состоять в предложении третьего варианта, если исходить из того, что наблюдается постоянная тенденция роста автомобильного парка в стране.

§ 3. Методы теории игр

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, в которых необходимо принимать решения в условиях неопределенности, т.е. возникают ситуации, в которых две (или более) стороны преследуют различные цели, а результаты любого действия каждой из сторон зависят от мероприятий партнера.

В экономике конфликтные ситуации встречаются очень часто и имеют многообразный характер. К ним относятся, например, взаимоотношения между поставщиком и потребителем, покупателем и продавцом, банком и клиентом. Во всех этих примерах конфликтная ситуация порождается различием интересов партнеров и стремлением каждого из них принимать оптимальные решения, которые реализуют поставленные цели в наибольшей степени. При этом каждому приходится считаться не только со своими целями, но и с целями партнера, и учитывать неизвестные заранее решения, которые эти партнеры будут принимать.

Для грамотного решения задач с конфликтными ситуациями необходимы научно обоснованные методы. Такие методы разработаны математической теорией конфликтных ситуаций, которая носит название ***теория игр***.

Математическая модель конфликтной ситуации называется ***игрой***, стороны, участвующие в конфликте, – ***игроками***, а исход конфликта – ***выигрышем***. Для каждой формализованной игры вводятся правила, т.е. система условий, определяющая:

1) варианты действий игроков;
2) объем информации каждого игрока о поведении партнеров;
3) выигрыш, к которому приводит каждая совокупность действий.

Как правило, выигрыш (или проигрыш) может быть задан количественно; например, можно оценить проигрыш нулем, выигрыш – единицей, а ничью – 1/2.

Игра называется ***парной***, если в ней участвуют два игрока, и ***множественной***, если число игроков больше двух. Рассмотрим парные игры. В них участвуют два игрока *А* и *В,* интересы которых противоположны, а под игрой будем понимать ряд действий со стороны *А и В.*

Правила игры – допустимые действия каждого из игроков. Совокупность ходов игроков называется ***стратегией игроков***.

Для того чтобы решить игру, или найти решение игры, следует для каждого игрока выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию *оптимальности,* т.е. один из игроков должен получать *максимальный выигрыш,* когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь *минимальный проигрыш,* если первый придерживается своей стратегии. Такие *стратегии* называются *оптимальными.* Оптимальные стратегии должны также удовлетворять условию *устойчивости,* т.е. любому из игроков должно быть невыгодно отказаться от своей стратегии в этой игре.

Если игра повторяется достаточно много раз, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а *средний выигрыш (проигрыш)* во всех партиях.

Целью теории игр является определение оптимальной стратегии для каждого игрока.

Пусть имеются два игрока. Первый игрок выбирает i–ю стратегию из всех возможных m (i=1; m), а второй, не зная выбора первого, выбирает – j-ю стратегию из n своих возможных стратегий (j=1, n).

В результате первый игрок выигрывает величину a_{ij}, а второй столько же проигрывает. Из чисел a_{ij} строят матрицу А, которую называют платежной матрицей.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Строки матрицы А соответствуют стратегиям первого игрока; столбцы – стратегиям второго игрока. Такие стратегии называются чистыми.

Число $\underset{i}{\alpha} = \max_i(\min_i a_{ij})$, называется ***нижней ценой игры*** или ***максимином,*** а соответствующая ему стратегия (строка) – ***максиминной***.

Число $\underset{j}{\beta} = \min_j(\max_j a_{ij})$, называется ***верхней ценой игры*** или ***минимаксом,*** а соответствующая ему стратегия (столбец) – ***минимаксной***.

Если $\alpha = \beta = V$, то число V называется ***ценой игры***.

Игра, для которой $\alpha = \beta$, называется ***игрой с седловой точкой***.

Для игры с седловой точкой нахождения решения состоит в выборе максиминной и минимаксной стратегии, которые являются оптимальными.

Если игра не имеет седловой точки, то для нахождения ее решения используются ***смешанные стратегии***.

Решение игры в чистых стратегиях

Задача. Швейное предприятие планирует выпуск новой модели одежды. Спрос на эту модель не может быть точно определен. Однако можно предположить, что его величина характеризуется тремя возможными состояниями (I, II, III). С учетом этих состояний анализируются три возможных варианта выпуска данной модели (А, В, С). Каждый из этих вариантов требует своих затрат и обеспечивает в конечном счете различный эффект. Прибыль, которую получает предприятие при данном объеме выпуска модели и соответствующем состоянии спроса, определяется матрицей:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 22 & 22 & 22 \\ 21 & 23 & 23 \\ 20 & 21 & 24 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \text{А} \\ \text{Б} \\ \text{В} \end{array} \end{array}$$

Требуется найти объем выпуска модели одежды, обеспечивающий среднюю величины прибыли при любом состоянии спроса.

Решение:

Прежде всего, проверим, имеет ли исходная матрица седловую точку. Для этого найдем нижнюю цену игры

$$\alpha = \max_i(\min_i a_{ij}) = \max(22, 21, 20) = 22$$

и верхнюю цену игры

$$\beta = \min_j(\max_j a_{ij}) = \min(22, 23, 24) = 22$$

Таким образом, $\alpha = \beta = 22$. Число 22 является ценой игры. Игра имеет седловую точку (a_{11}), соответствующую I варианту выпуска модели одежды. Объем выпуска модели, соответствующей данному варианту, обеспечивает прибыль в 22 ден. ед. при любом состоянии спроса.

Решение игры в смешанных стратегиях

Задача. Обувная фабрика планирует выпуск двух моделей обуви А и В. Спрос на эти модели не определен, однако можно предположить, что он может принимать одно из двух состояний (I и II). В зависимости от этих состояний прибыль предприятия различна и определяется матрицей $A = \begin{pmatrix} 52 & 22 \\ 22 & 49 \end{pmatrix}$. Найти оптимальное соотношение между объемами выпуска каждой из моделей, при котором предприятию гарантируется средняя величина прибыли при любом состоянии спроса.

Решение:

Проверим, имеет ли исходная матрица седловую точку. Для этого найдем: нижнюю цену игры

$$\alpha_i = \max_i(\min_i a_{ij}) = \max_i(22, 22) = 22$$

верхнюю цену игры

$$\beta_j = \min_j(\max_j a_{ij}) = \min_j(52, 49) = 49$$

V – цена игры

Седловой точки нет. Цена игры $22 \le V \le 49$

Пусть для фабрики стратегия выпуска обуви задается вектором X (x_1; x_2). Тогда

$$\begin{cases} 52x_1 + 22x_2 = V \\ 22x_1 + 49x_2 = V \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Решив систему уравнений с тремя неизвестными, получим:

$$x_1=0{,}47; \quad x_2=0{,}53; \quad V = 36$$

В общем объеме выпускаемой продукции 47% составляют изделия А и 53% - изделия Б. Выпуская в таком объеме обувь, фабрике гарантируется средняя величина прибыли в размере 36 тыс. руб. при любом состоянии спроса.

ГЛОССАРИЙ

Вероятность – математическая, числовая характеристика степени возможности появления какого-либо события в тех или иных определенных, могущих повторяться неограниченное число раз условиях.

Вербальное моделирование – моделирование на основе использования разговорного языка.

Взаимозаменяемость ресурсов – возможность использования разных ресурсов для достижения оптимума.

Выборка – часть совокупности элементов, которая охватывается наблюдением.

Геометрическое моделирование осуществляется на макетах или объектных моделях. Эти модели передают пространственные формы объекта, пропорции и т.п.

Гипотеза – предположение, требующее научного доказательства; точнее, не всякое предположение, а предварительное объяснение проблемы, основанное на имеющихся знаниях и опыте.

Детерминированные модели – это модели, в которых предполагаются жесткие функциональные связи.

Динамические модели – это модели, у которых параметры изменяются во времени.

Дискретные модели – это модели, в которых время квантовано.

Дисперсией называется математическое ожидание квадрата отклонений случайной величины от своего математического ожидания.

Дисциплина очереди описывает порядок обслуживания заявок, поступающих на вход системы.

Задача массового обслуживания – класс задач исследования операций, заключающихся в нахождении оптимальных параметров систем массового обслуживания.

Законом распределения называют соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Игра – формализованная модель конфликтной ситуации, включающей определенные правила действий участников, добивающихся выигрыша в результате принятия той или иной стратегии.

Информационное моделирование имеет фундаментально значение во всех областях науки: схемы, графики, чертежи, формулы, уравнения, неравенства.

Календарное планирование – планирование, которое состоит из разработки годовых, сезонных, квартальных и месячных планов производства.

Канал обслуживания – это единица, обслуживающая систему массового обслуживания.

Корреляция – в широком смысле слова означает связь, соотношение между объективно существующими явлениями.

Корреляционный анализ – исследование корреляционных связей.

Корреляционное отношение используется для оценки тесноты связи между двумя явлениями.

Коэффициент детерминации служит для оценки точности регрессии, то есть соответствие полученного уравнения регрессии имеющимся эмпирическим данным.

Коэффициент эластичности выпуска по ресурсам показывает, на сколько процентов изменится производство при изменении затрат соответствующего производственного ресурса на один процент.

Критический путь – это наиболее продолжительный полный путь в сетевом графике.

Линейное программирование – область математического программирования, посвященная теории и методам решения экстремальных задач, характеризующихся линейной зависимостью между переменными.

Математическое программирование – область математики, объединяющая различные математические методы и дисциплины: линейное и нелинейное программирование, динамическое программирование, выпуклое программирование и др.

Медианой (Me) случайной величины называется такая величина, относительно которой равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины.

Межотраслевой баланс общественного продукта (МОБ) представляет собой прямоугольную таблицу чисел, состоящую из четырех разделов. Все элементы ее рассчитываются в стоимостных единицах.

Метод Дельфи основан на обработке субъективных мнений – экспертных оценок специалистов, занятых в интересующей сфере деятельности.

Метод наименьших квадратов позволяет подобрать некоторую непрерывную аналитическую функцию для аппроксимации дискретного набора исходных данных.

Метод статистического анализа базируется на использовании ретроспективных данных.

Множественная регрессия – это регрессия между зависимой переменной y и несколькими объясняющими переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Модель – это условный образ реального объекта, для более глубокого изучения действительности.

Моделирование – это универсальный способ изучения процессов и явлений реального мира.

Модой (Mo) дискретной случайной величины называется ее значение, обладающее наибольшей вероятностью. Для непрерывной случайной величины мода есть такое значение, которое отвечает максимальной плотности распределения.

Мультиколлинеарность – попарная корреляционная зависимость между факторами.

Непрерывные модели – это модели, в которых время рассматривается как непрерывный фактор.

Нормальной кривой (кривой Гаусса) – называется график плотности нормального распределения.

Оперативное планирование – планирование, которое обеспечивает разработку плановых заданий производственным подразделениям на неделю, день, смену.

Перспективное планирование – это разработка планов развития экономического объекта на длительный срок.

Планирование – деятельность по подготовке управленческих решений.

Полные затраты – это сумма прямых и косвенных затрат всех порядков.

Прикладные модели дают возможность определять и оценивать параметры функционирования конкретных экономических объектов и формулировать рекомендации для принятия хозяйственных практических решений.

Прогнозирование – это научное определение вероятных путей и результатов предстоящего развития экономической системы, оценка показателей, характеризующих это развитие в течение более или менее отдаленного будущего.

Производственной функцией – называется аналитическое соотношение, связывающее переменные величины затрат (факторов, ресурсов) с величиной выпуска продукции.

Простая регрессия – регрессия между двумя переменными.

Регрессионный анализ – исследование односторонних стохастических зависимостей.

Седловая точка – элемент платежной матрицы, который является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке.

Сетевая модель представляет собой план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), заданного в специфической форме сети.

Сетевым графиком – называется графическое изображение сетевой модели.

Система методов сетевого планирования и управления (СПУ) – система методов планирования и управления разработкой крупных народнохозяйственных комплексов, научными исследованиями, конструкторской и технологической подготовкой производства, новых видов изделий, строительством и реконструкцией, капитальным ремонтом основных фондов путем применения сетевых графиков.

Система массового обслуживания – это система, предназначенная для многоразового использования при решении однотипных задач.

Случайной величиной называют величину значения исследуемого признака, измеренную по результатам исхода испытаний, которая может принять то или иное значение, заранее неизвестное.

Статические модели – это модели, в которых значения всех параметров относятся к одному моменту или периоду времени.

Стохастические модели – допускают наличие случайных воздействий на исследуемые показатели и используют инструментарий теории вероятностей и математической статистики.

Стратегия представляет собой детальный всесторонний комплексный план, предназначенный для того, чтобы обеспечить осуществление миссии организации и достижение ее целей.

Тактика представляет собой конкретные краткосрочные стратегии.

Теоретико-игровые модели учитывают воздействие факторов, обладающих более высокой степенью неопределенности, нежели стохастическая.

Теоретические модели предназначены для изучения общих закономерностей и свойств рассматриваемой экономической системы.

Физическое моделирование применяется для изучения физико-химических, технологических, биологических, генных процессов, происходящих в оригинале. Такое моделирование называется аналоговым.

Экономико-математическая модель – это математическое описание исследуемого экономического процесса или объекта. Эта модель выражает закономерности экономического процесса в абстрактном виде с помощью математических соотношений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем. – М.: Финансы и статистика, 2002.

2. Васильков Ю.В., Василькова Н.Н. Компьютерные технологии вычислений в математическом моделировании: Учеб. пособие. – М.: Финансы и статистика, 2001.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов. Изд. 5-е, стер. – М.: Высшая школа, 2000.

4. Доспехов Б.А. Методика полевого опыта (с основами статистической обработки результатов исследований). – 5-е изд., доп. и перераб. – М.: Агропромиздат, 1985.

5. Замков О.О. Математические методы в экономике: Учебник – М.: Изд-во «Дело и Сервис», 1999.

6. Исследование операций в экономике: Учебн. пособие для вузов/ Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1999.

7. Кобелев Н.Б. Практика применения экономико-математических методов и моделей. Учеб.-практ. пособие. – М.: ЗАО «Финанстатинформ», 2000.

8. Компьютерное моделирование. Экология / Под ред. Угольницкого Г.А. – М.: Вузовская книга, 2000.

9. Компьютерное моделирование. Экономика / Под ред. Жака С.В., Угольницкого Г.А. – М.: Вузовская книга, 2000.

10. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике – СПб: Питер, 2000.

11. Кундышева Е. С. Экономико-математическое моделирование : учеб. для вузов / Е. С. Кундышева ; под ред. Б. А. Суслакова . – М. : Дашков и К, 2008.

12. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. – СПб.: BHV – Санкт-Петербург, 1997.

13. Математические методы и модели в планировании: Учеб. пособ. для экон. вузов / А.И. Карасев, Н.Ш. Кремер, Т.И. Савельева; Под ред. А.И.Карасева. – М.: Экономика, 1987.

14. Математические методы и модели в экономике: Учебник / С.Н. Грицюк, Е.В. Мирзоева, В.В. Лысенко – Ростов н/Д: Феникс, 2007.

15. Математические методы принятия решений в экономике: Учебник / Под ред. проф. В.А. Колемаева. – М.: ЗАО «Финстатиформ», 1999.

16. Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве / Под ред. А.М. Гатаулина. – М.: Агропромиздат, 1990.

17. Методы и модели информационного менеджмента. Учеб. пособие для вузов /под ред. А. В. Кострова М.: Финансы и статистика, 2007.

18. Моделирование народнохозяйственных процессов / под ред. И.В. Коматова – Л.: Изд-во ЛГУ, 1990.

19. Орехов Н.А., Левин А.Г., Горбунов Е.А. Математические методы и модели в экономике: Учеб. пособие для вузов / Под ред. Проф. Н.А. Орехова. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004.

20. Орлова И. В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде EXCEL. Практикум учеб. пособие для вузов М. Финстатинформ, 2000.

21. Орлова И.В. Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде Excel. Учебное пособие для вузов. – М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000.

22. Партыка Т.Л., Попов И.И. Математические методы: Учебник. – М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2005.

23. Пелих А.С., Терехов Л.Л., Терехова Л.А. Экономико-математические методы и модели в управлении производством. – Ростов н/Д: «Феникс», 2005.

24. Перегудов Ф.И., Тарасенко Ф.П. введение в системный анализ: Уч. пос. для вузов – М.: Высш. шк., 1989.

25. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2-х книгах, Пер. с англ. – М.: Мир, 1985.

26. Фомин Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. Учеб. для вузов 2-е изд., перераб. и доп. М.: Финансы и статистика, 2005.

27. Френкель А. А. Прогнозирование производительности труда: методы и модели 2-е изд., перераб. и доп. М.: Экономика, 2007.

28. Шелобаева И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учебное пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ – Дана, 2000.

29. Шикин Е. В. Математические методы и модели в управлении учеб. пособие для вузов. – М.: Дело, 2002.

30. Экономико-математические методы и прикладные модели. Учеб. пособие для вузов / В.В. Федосеев и др. – М.: ЮНИТИ, 2000.

Научное издание

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
МОДЕЛИ. МЕТОДЫ. ПРИМЕРЫ

Монография

ISBN 978-5-88517-199-1

Редактор Лебедева Е.М.

Подписано к печати 18.05.2011 г. Формат 60х84 1/24 Бумага печатная.
Усл. п.л. 9,41. Тираж 150. Издат. № 1955.

Издательство Брянской государственной сельскохозяйственной академии
243365 Брянская обл., Выгоничский р-он, с. Кокино, Брянская ГСХА